

## Analysis I/II

## Folgen

Def.: Ein Punkt  $a$  heißt Häufungspunkt der Folge  $(x_n)$ , wenn sich in jeder Umgebung  $U_\varepsilon(a)$  unendlich viele Punkte  $x_n$  befinden; genauer: wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  und zu jedem  $n_0 \in \mathbb{N}$  ein  $n > n_0$  existiert mit  $x_n \in U_\varepsilon(a)$ .

Def.: Ein Punkt  $a$  heißt Grenzwert oder Limes der Folge  $(x_n)$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt mit  $x_n \in U_\varepsilon(a) \quad \forall n > n_0$ .

Konvergenzkriterien:

Satz: Jede monoton wachsende / fallende und beschränkte Folge reeller Zahlen konvergiert gegen ihr Supremum / Infimum.

Satz von Bolzano-Weierstraß: Jede beschränkte Folge besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

Cauchy-Kriterium: Eine Folge  $(x_n)$  in  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n$  ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist, d.h. wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert mit  $|x_m - x_n| < \varepsilon \quad \forall m, n > n_0$ .

## Reihen

Konvergenzkriterien:

Cauchy-Kriterium: Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergiert genau dann, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert mit  $|\sum_{k=n+1}^m a_k| < \varepsilon$  für alle  $m \geq n \geq n_0$ .

Majorantenkriterium: Besitzt die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  eine konvergente Majorante, so ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut konvergent. Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  ist eine Majorante für die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ , wenn  $|a_k| \leq c_k$  für fast alle  $k$  ( $c_k \in \mathbb{R}$ ).

Minorantenkriterium: Besitzt die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  eine divergente Minorante, so ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  divergent. Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  ist eine Minorante für die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ , wenn  $0 \leq c_k \leq a_k$  für fast alle  $k$  gilt ( $c_k, a_k \in \mathbb{R}$ ).

Satz: Eine Reihe mit positiven reellen Koeffizienten konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.

Wurzelkriterium: Gibt es eine reelle Zahl  $q < 1$  mit  $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$  für fast alle  $k$ , so ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut konvergent.

Quotientenkriterium: a) Gibt es eine reelle Zahl  $q < 1$  mit  $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q$  für fast alle  $k$ , so ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut konvergent ( $a_k > 0, a_k \in \mathbb{R}$ ).  
b) Ist  $\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$  für fast alle  $k$ , so divergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ( $a_k > 0, a_k \in \mathbb{R}$ ).

Konvergenzkriterium von Abel: Sind die Partialsummen der reellen oder komplexen Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  beschränkt, und ist  $(c_k)$  eine reelle, monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k c_k$ .

Korollar: Alternierende Reihen  $(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k, (c_k)$  eine reelle, monoton fallende Nullfolge) sind konvergent.

Das Produkt zweier Reihen:

Satz: Sind die reellen oder komplexen Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  absolut konvergent und  $c_r := \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ , so ist die Reihe  $\sum_{r=0}^{\infty} c_r$  absolut konvergent, und es gilt:  $\sum_{r=0}^{\infty} c_r = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ .

Potenzreihen:  $(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, a_k, z \in \mathbb{R}, \mathbb{C})$

Def.: Limes Superior / Inferior ( $\limsup a_k / \liminf a_k$ ) einer reellen Folge  $(a_k)$ : Eigentliches oder uneigentliches Supremum / Infimum der Menge der Häufungspunkte einer Folge  $(a_k)$ .  
( $(a_k)$  nach oben / unten nicht beschränkt:  $+\infty / -\infty$  ist uneigentliches Häufungspunkt.)

Satz: Eine reelle Folge  $(a_k)$  ist genau dann eigentlich oder uneigentlich konvergent, wenn gilt:  $\limsup a_k = \liminf a_k (= \lim a_k)$ .

Def.: Die nicht-negative reelle Zahl  $\rho := \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}}$  heißt Konvergenzradius der Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ .

Satz: Es sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  eine beliebige Potenzreihe mit Konvergenzradius  $\rho$ . Dann gilt:  
 (a) die Potenzreihe divergiert für alle  $z$  mit  $|z| > \rho$ ,  
 (b) die Potenzreihe konvergiert absolut für alle  $z$  mit  $|z| < \rho$ ,  
 (c) die Potenzreihe konvergiert gleichmäßig auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe vom Radius  $r < \rho$ .

Satz: Der Konvergenzradius der Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  beträgt  $\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$ , falls dieser Limes existiert.

Satz: Jede reelle Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k =: f(x)$  ist im Inneren ihres Konvergenzintervalls glattweise differenzierbar und integrierbar, d.h. es gilt auf  $] -\rho, +\rho [$  ( $\rho$  Konvergenzradius):

(a)  $f'_x(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$   
 (b)  $\int f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$

Satz: Ist  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  auf  $] -\rho, +\rho [$ ,  $\rho > 0$ , so ist  $f$  auf diesem Intervall beliebig oft differenzierbar, und es gilt:  $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ ; d.h. die Reihe ist identisch mit der Taylorreihe  $T_{\infty,0} f$ .

Satz von Abel (über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Rand des Konvergenzkreis):  
 Ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergent, so gilt:  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{x \rightarrow +0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ .

### Wichtige Funktionen

Die Exponentialfunktion:

Def.:  $\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} =: e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Funktionalgleichung:  $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$

Die reelle Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  ist bijektiv; ihre Umkehrfunktion ist die Logarithmusfunktion  $\log: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

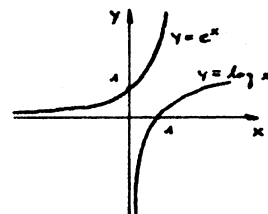
Funktionalgleichung der Logarithmusfunktion:  $\log x_1 + \log x_2 = \log(x_1 x_2)$

Reihenentwicklung der Logarithmusfunktion:  $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$

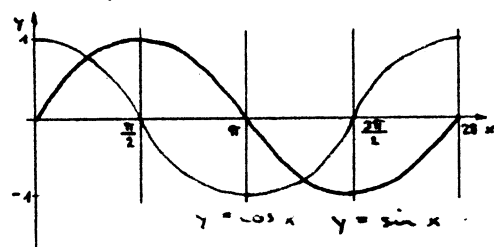
Eulersche Formel:

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$$

$$e^x = \cosh x + \sinh x$$



Die trigonometrischen Funktionen:



$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y, \quad \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}, \quad 1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}, \quad 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}, \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cdot \cos \frac{x \mp y}{2}, \quad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

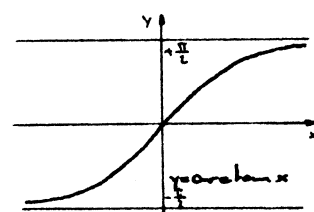
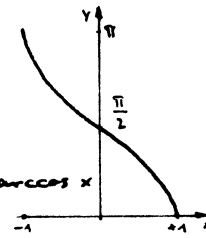
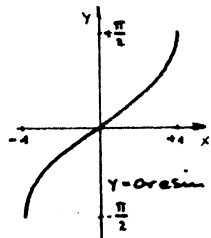
Umkehrfunktionen:

$$\arcsin: [-1, +1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos: [-1, +1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$\operatorname{arctan}: \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$$

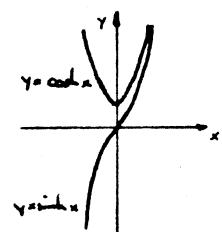
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$



Die hyperbolischen Funktionen:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y, \quad \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$



## Stetige Funktionen

Def.: Eine Funktion  $f$  heißt stetig an der Stelle  $x_0$ , wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, sodaß für alle  $x \in D(f)$  mit  $|x - x_0| < \delta$  gilt:  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

Folgenkriterium: Eine Funktion  $f$  ist genau dann an der Stelle  $x_0$  stetig, wenn für jede Folge  $(x_n)$  in  $D(f)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ .

Zwischenwertsatz (Spezialfall): Ist  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $f(a) < 0 < f(b)$ , so gilt es ein  $\xi \in ]a, b[$  mit  $f(\xi) = 0$ .

Zwischenwertsatz (allg. Form): Es sei  $I$  ein beliebiges Intervall,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion,  $\alpha := \inf \{f(x) \mid x \in I\} \geq -\infty$ ,  $\beta := \sup \{f(x) \mid x \in I\} \leq +\infty$ . Dann nimmt  $f$  jeden Wert  $\eta \in ]\alpha, \beta[$  wenigstens einmal an.

Korollar: Sei  $f$  eine stetige reelle Funktion. Dann gilt:  $[a, b] \in D(f) \Rightarrow [f(a), f(b)] \subseteq U(f)$ .

### Kompakte Mengen, globale Extrema:

Def.: Ein Punkt  $a$  ist Berührungspunkt der Menge  $A$ , wenn in jeder Umgebung  $\dot{U}_\varepsilon(a) := U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$  wenigstens ein Punkt aus  $A$  liegt.

Def.: Eine Menge  $A$  heißt abgeschlossen, wenn jeder Berührungspunkt von  $A$  in  $A$  liegt.

Def.: Eine Menge  $A$  heißt kompakt, wenn jede Folge  $(x_n)$  in  $A$  eine Teilfolge besitzt, die gegen einen Punkt aus  $A$  konvergiert.

Satz: Eine Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n$  ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Satz: Das stetige Bild einer kompakten Menge ist kompakt.

Satz: Eine auf einer nicht-leeren kompakten Menge definierte stetige, reellwertige Funktion besitzt dort ein globales Maximum und ein globales Minimum.

P: Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $f(x) > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Dann besitzt  $f$  ein globales Maximum und kein globales Minimum.

P: Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Dann gilt:  
(a) Falls  $x_0$  mit  $f(x_0) > 0$  existiert, so besitzt  $f$  ein globales Maximum.  
(b) Falls  $x_1$  mit  $f(x_1) < 0$  existiert, so besitzt  $f$  ein globales Minimum.

P: Es sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ . Dann gilt:  
(a) Falls  $x_0$  mit  $f(x_0) > 0$  existiert, so besitzt  $f$  ein globales Maximum.  
(b) Falls  $x_1$  mit  $f(x_1) < 0$  existiert, so besitzt  $f$  ein globales Minimum.

P: Ist  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ , so besitzt  $f$  ein globales Maximum und kein globales Minimum (und entsprechend umgekehrt).

### Grenzwerte von Funktionen:

Def.:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff$  Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , sodaß für alle  $x \in D(f)$  mit  $0 < |x - a| < \delta$  gilt:  $|f(x) - b| < \varepsilon$ .

Folgenkriterium:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff$  Für jede Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \in D(f) \setminus \{a\} \forall n$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$ .

Satz:  $f$  stetig an der Stelle  $a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Cauchy-Kriterium:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existiert genau dann, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, sodaß für alle  $x, y \in \dot{U}_\delta(a) \cap D(f)$  gilt:  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

### Monotone Funktionen:

Satz: Die inverse Funktion einer stetigen streng monoton wachsenden Funktion ist stetig und streng monoton wachsend (entsprechend für streng monoton fallende Funktionen).

### Gleichmäßige Stetigkeit:

Def.: Eine Funktion  $f$  heißt gleichmäßig stetig auf dem Intervall  $A$ , wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, sodaß für alle  $x, y \in A$  mit  $|x - y| < \delta$  gilt:  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

Def.:  $f$  ist nicht gleichmäßig stetig auf  $A$ : Es existiert ein  $\varepsilon > 0$ , sodass es zu jedem  $\delta > 0$  ein  $x \in A$  und ein  $y \in A$  gibt mit  $|x - y| < \delta$  und  $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ .

Bsp.:  $f: x \mapsto x^2$  ist auf  $\mathbb{R}$  nicht gleichmäßig stetig.

Beweis: Wir wählen  $x, y$  so, dass gilt:  $\frac{1}{2} < x < y < x + \frac{1}{2}$  ( $\Rightarrow |x - y| = \frac{1}{2} < \delta$ )  
 $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = (y - x)(y + x) = \frac{1}{2} \cdot (y + x) > \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = 1 =: \varepsilon$  qed.

Satz: Eine auf einer kompakten Menge definierte stetige Abbildung ist dort gleichmäßig stetig.

## Differentialrechnung

Def.: Eine Funktion  $f$  heißt differenzierbar an der Stelle  $x_0$ , wenn der Limes

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert.  $f'(x_0)$  heißt Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

Satz: Wenn die Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar ist, so existiert ein an der Stelle  $x_0$  stetige Funktion  $r$  mit  $\lim_{x \rightarrow x_0} r(x) = 0$ , sodass gilt:  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + r(x) \cdot (x - x_0) \forall x$ .  
 D.h.  $f$  wird durch eine lineare Funktion approximiert (in der Nähe von  $x_0$ ).

Ableitungsregeln:

Produktregel:  $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$  Quotientenregel:  $(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Kettenregel:  $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$

Ableitung der Umkehrfunktion: Ist die Funktion  $f$  streng monoton und differenzierbar auf  $A$ , so ist die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  differenzierbar in allen Punkten  $y \in f(A)$  mit  $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$ , und es gilt:  $f^{-1}(y)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ .

Satz: Existiert die Ableitung  $f'(x_0)$ , so ist die Funktion  $f$  stetig an der Stelle  $x_0$ .

Lokale Extrema:

Def.: Die Funktion  $f$  besitzt an der Stelle  $x_0$  ein lokales Maximum / Minimum, wenn ein  $\delta > 0$  existiert, sodass gilt:  $f(x) \leq f(x_0)$  /  $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D(f)$ .

Satz: Es sei  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  ( $A \subseteq \mathbb{R}$ ) eine Funktion,  $x_0$  eine (lokale oder globale) Extremalstelle von  $f$ . Dann gilt notwendigerweise eine der folgenden Aussagen:

- (a)  $x_0$  ist ein Randpunkt von  $A$ ,
- (b)  $f$  ist nicht differenzierbar an der Stelle  $x_0$ ,
- (c)  $f$  ist stationär an der Stelle  $x_0$  ( $\Leftrightarrow f'(x_0) = 0$ ).

Mittelwertsatz:

(\*)  $\Leftrightarrow$  Die Funktion  $f$  ist differenzierbar auf  $]a, b[$  und stetig auf  $[a, b]$ .

Satz von Rolle: Genügt eine Funktion  $f$  der Bedingung (\*) und ist  $f(a) = f(b)$  so existiert  $\xi \in ]a, b[$  mit  $f'(\xi) = 0$ .

Mittelwertsatz der Differentialrechnung: Erfüllt die Funktion  $f$  die Bedingung (\*), so existiert  $\xi \in ]a, b[$  mit  $f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$ , bzw. es existiert  $\theta \in ]0, 1[$  mit  $f(a + \theta \cdot h) - f(a) = f'(a + \theta \cdot h) \cdot h$ .

Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung: Erfüllen die Funktionen  $f$  und  $g$  beide die Bedingung (\*) und ist  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in ]a, b[$ , so existiert  $\xi \in ]a, b[$  mit  $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ .

Regel von Bernoulli de l'Hôpital: Die Funktionen  $f$  und  $g$  seien auf  $[a, b]$  differenzierbar,  $g(x) \neq 0$ ,  $g'(x) \neq 0$  auf  $]a, b[$  und es sei  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$  oder  $\pm \infty$ . Existiert dann der eigentliche oder uneigentliche Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , so gilt:  $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

Monotonie:

Satz: Es sei  $f$  eine differenzierbare Funktion. Dann gilt:

- (a)  $f$  monoton wachsend  $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in D(f)$ ,
- (b)  $f$  streng monoton wachsend  $\Leftrightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in D(f)$  und in keinem nicht-leeren, offenen Intervall ist  $f'(x) \equiv 0$ .

Für monoton fallende Funktionen gilt der analoge Satz.

## Konvexität:

Def.: Eine Funktion  $f$  ist auf dem Intervall  $A$  konvex / konkav, wenn für alle  $x_1 < x < x_2$  in  $A$  gilt:  $f(x) \leq f(x_1) + (x - x_1) \cdot \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  ( $=: f''(x)$ ).



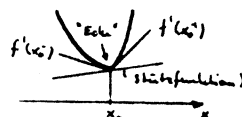
Ein konvexe Funktion beschreibt eine Linkskurve, eine konkave Funktion eine Rechtskurve, wenn man die Kurve von links nach rechts durchläuft.

P Ist die Funktion  $f$  konvex auf  $A$ ,  $x_1 < x < x_2$  in  $A$ , so gilt:  $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$ .

P Ist die Funktion  $f$  konvex auf  $A$ ,  $x_0 \in A$ , so ist die Funktion  $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  streng monoton wachsend auf  $A \setminus \{x_0\}$ .

Satz: Eine auf einem offenen Intervall  $A$  konvexe Funktion  $f$  ist stetig auf  $A$ , in jedem Punkt  $x_0 \in A$  existieren die einseitigen Ableitungen  $f'(x_0^-)$ ,  $f'(x_0^+)$ , und es ist stets  $f'(x_0^-) \leq f'(x_0^+)$ .  
Ist  $f'(x_0^-) \leq m \leq f'(x_0^+)$ , so gilt:  $f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0) \quad \forall x \in A, x \neq x_0$  (Stützfunktion).

Konvexitätskriterium: Ist die Funktion  $f$  auf dem offenen Intervall  $A$  mindestens zweimal differenzierbar, so ist  $f$  konvex / konkav auf  $A$  genau dann, wenn  $f''(x) \geq 0$   $\forall x \in A$  und  $f''$  auf keinem nicht-leeren offenen Intervall  $\equiv 0$  ist.



Satz: Es sei  $f$  eine auf dem Intervall  $A$  konvexe / konkave Funktion,  $p = (p_1, \dots, p_n)$  ein Gewichtsatz (d.h.  $p_k \geq 0 \quad \forall k \leq n$  und  $\sum_{k=1}^n p_k = 1$ ). Dann gilt für alle  $x_1, \dots, x_n \in A$ :  
 $f(\sum_{k=1}^n p_k x_k) \leq \sum_{k=1}^n p_k f(x_k)$ .

## Taylorpolynome:

Def.: Ist die Funktion  $f$  an der Stelle  $a$  mindestens  $n$ -mal differenzierbar, so existiert das  $n$ -te Taylorpolynom von  $f$  mit Mittelpunkt  $a$ :

$$(T_{n,a} f)(x) := \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(a).$$

P Ist die Funktion  $f$  ein Polynom vom Grade  $n$ , so gilt:  $(T_{n,a} f)(x) = f(x)$ .

Satz (Taylorische Formel mit Restglied): Es sei  $f$  eine auf  $[a, x]$   $n$ -mal stetig differenzierbare und auf  $]a, x[$   $n+1$ -mal differenzierbare Funktion. Dann existiert  $\xi \in ]a, x[$ , sodass gilt:  
 $f(x) = (T_{n,a} f)(x) + R_n$ , wobei  $R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$  (Lagrangesches Restglied).

Satz (qualitative Fassung der Taylorischen Formel): Es sei  $f$  eine an der Stelle  $a$   $n$ -mal differenzierbare Funktion. Dann existiert eine Funktion  $r$  mit  $\lim_{x \rightarrow a} r(x) = 0$ , sodass gilt:  
 $f(x) = (T_{n,a} f)(x) + (x-a)^{n+1} \cdot r(x)$ .

Def.: Die Landauschen Spitzsätze  $\frac{0}{0}$ :

(a)  $f(x) = o(g(x))$  für  $x \rightarrow a \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$  ( $f$  strebt schneller gegen 0 als  $g$ ).

(b)  $f(x) = O(g(x))$  für  $x \rightarrow a \iff \exists C$  mit  $|f(x)| < C \cdot |g(x)|$  für alle  $x$  nahe  $a$ .  
( $f$  ist nicht wesentlich größer als  $g$  in einer Umgebung von  $a$ .)

Satz: Ist die Funktion  $f$  an der Stelle  $a$   $n+1$ -mal differenzierbar, so ist  $f(x) = (T_{n,a} f)(x) + o((x-a)^{n+1})$ .

Def.: Taylorreihe:  $(T_{\infty,a} f)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(a)$

Die Taylorreihe einer Funktion  $f$  konvergiert nicht immer gegen die Funktion  $f$ . Die Fragen:

- (a) Für welche Werte von  $x$  konvergiert die Taylorreihe?
  - (b) Für welche Werte von  $x$  konvergiert die Taylorreihe gegen  $f(x)$ ? sind immer neu zu beantworten.
- Der Konvergenzbereich ist i. A. symmetrisch bezüglich des Mittelpunktes.

## Integralrechnung

(uneigentliche Integrale s. S. 10)

### Riemannsches Integral:

Def.: Eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt finit, wenn es eine Zahl  $M$  gibt, sodass gilt:

- (a)  $|f(x)| \leq M \quad \forall x$ ,  
(b)  $f(x) = 0 \quad \forall x$  mit  $|x| > M$ .

Unterteilung der  $x$ -Achse in Intervalle der Länge  $2^{-r}$ :  $I_{r,k} := [k \cdot 2^{-r}, (k+1) \cdot 2^{-r}]$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$   
 $\underline{f}_{r,k} := \inf \{f(x) \mid x \in I_{r,k}\}$ ,  $\overline{f}_{r,k} := \sup \{f(x) \mid x \in I_{r,k}\}$

Def.:  $r$ -te Obersumme:  $\overline{S}_r := \sum_{k=-r}^r \overline{f}_{r,k} \cdot 2^{-r}$ ,  $r$ -te Untersumme:  $\underline{S}_r := \sum_{k=-r}^r \underline{f}_{r,k} \cdot 2^{-r}$

Def.: Oberes Integral:  $\int f dx := \lim_{r \rightarrow \infty} \overline{S}_r$ , unteres Integral:  $\int f dx := \lim_{r \rightarrow \infty} \underline{S}_r$

Ist  $f$  eine finite Funktion, so existieren das obere und das untere Integral immer.

Def.: Eine Funktion  $f$  heißt Riemann-integrierbar, wenn gilt:  $\int f d\mu = \int |f| d\mu =: \int f d\mu$ .

Satz: Jede finite, stückweise stetige Funktion ist integrierbar.

Satz: Jede beschränkte und auf dem Intervall  $A := [a, b]$  stückweise stetige Funktion ist integrierbar auf  $A$ .

1 Sind die Funktionen  $f$  und  $g$  integrierbar und gilt:  $f(x) \leq g(x)$  für alle  $x$ , so ist  $\int f d\mu \leq \int g d\mu$ .

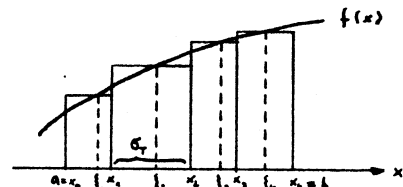
1 Mit  $f$  ist auch  $|f|$  integrierbar, und es gilt:  $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$ .

Mittelwertsatz der Integralrechnung: Ist die Funktion  $f$  stetig auf  $A := [a, b]$ , so existiert ein  $\xi \in A$  mit  $\int_A f d\mu = f(\xi) \cdot (b-a)$ .

Verallgemeinerter Mittelwertsatz: Es seien  $f$  und  $p$  stetige Funktionen auf  $A := [a, b]$ ,  $p(x) \geq 0$  auf  $A$ . Dann existiert ein  $\xi \in A$  mit  $\int_A f \cdot p d\mu = f(\xi) \cdot \int_A p d\mu$ .

Riemannsche Summen:

Def.: Teilung  $T$  von  $[a, b]$ :  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ ,  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  
wobei gilt:  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ ,  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$   
Feinheit der Teilung  $T$ :  $\sigma_T := \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})$



Def.: Zur Teilung  $T$  gehörige Riemannsche Summe:  $S_T(f) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$  ( $f$  eine Funktion).

Satz: Es sei  $f$  eine auf  $[a, b]$  stetige Funktion,  $(T_n)$  eine Folge von Teilungen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{T_n} = 0$ .  
Dann gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{T_n}(f) = \int_{[a, b]} f d\mu$ .

Anwendung: Berechnung der Summe von Riemann:

Teilung  $T_n$ :  $x_k := \frac{k}{n}$ ,  $\xi_k := \frac{k}{n} \Rightarrow x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{T_n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n}) \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 f(t) dt$

Bsp.:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \log|1+x| \Big|_0^1 = \log 2$

Berechnung von Integralen:

Hauptsatz der Infinitesimalrechnung: Ist die Funktion  $f$  stetig auf  $A := [a, b]$ , dann gilt für alle  $x \in A$ :  
 $\frac{d}{dx} \int_{[a, x]} f d\mu = f(x)$ .

Satz: Jede auf dem Intervall  $I$  stetige Funktion besitzt dort eine Stammfunktion.

Partielle Integration:  $\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx$

1. Substitutionsregel:  $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int f(u) du \Big|_{u=\varphi(x)}$

Bsp.:  $\int x \cdot \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int \cos u du \Big|_{u=x^2} = \frac{1}{2} \sin u \Big|_{u=x^2} = \frac{1}{2} \sin(x^2)$

2. Substitutionsregel:  $\int f(x) dx = \int f(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt \Big|_{t=\psi^{-1}(x)}$ ,  $\psi$  bijektiv

$\int \tan x dx = -\log \cos x$ ,  $\int \cot x dx = \log \sin x$ ,  $\int \frac{1}{x} dx = \log|x|$ ,  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)|$ ,

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \log|\tan \frac{x}{2}|$ ,  $\int \frac{dx}{\cos x} = \log|\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})|$ ,  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$ ,  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$ ,  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}$ ,

$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$ ,  $\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$ ,  $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$ ,  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$ ,

$\int \log x dx = x(\log x - 1)$ ,  $\int \sinh x dx = \cosh x$ ,  $\int \cosh x dx = \sinh x$ ,  $\int \tanh x = \log \cosh x$

$\int \arcsin x dx = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ ,  $\int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$ ,  $\int \arctan x = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$ ,

$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$ ,  $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \cdot \log \frac{x-a}{x+a}$ ,  $\int \sqrt{a^2+x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \log(x + \sqrt{a^2+x^2})$ ,

$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$ ,  $\int \sqrt{x^2-a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \log(x + \sqrt{x^2-a^2})$ ,  $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \log(x + \sqrt{x^2+a^2})$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a}$ ,  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \log(x + \sqrt{x^2-a^2})$

Integration gewisser Funktionsklassen:

①  $R(e^x)$  (rationaler Ausdruck in  $e^x$ ): Substitution  $t = e^x$ ,  $x = \log t$ ,  $dx = \frac{dt}{t}$  führt auf einen rationalen Ausdruck in  $t$ .

②  $R(\sinh x, \cosh x)$ :  $t = e^x$ ,  $\sinh x = \frac{t-1}{2}$ ,  $\cosh x = \frac{t+1}{2}$ ,  $dx = \frac{dt}{t}$

③  $R(\sin x, \cos x, \tan x)$ :  $t = \tan \frac{x}{2}$ ,  $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ ,  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,  $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

(Manchmal geht auch:  $t = \sin x$  oder  $t = \cos x$ .)

## Integration rationaler Funktionen:

I. Reduktion auf einen echten Bruch durch Abspalten eines Polynoms. Bsp.:  $\frac{x^2}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x^2-1}$

II. Partialbruchzerlegung: Das normierte Nennerpolynom erfüllt in reellen Linearfaktoren  $(x-d)$  und quadratischen Faktoren  $(x^2-2\beta x + \gamma)$  mit negativer Diskriminante  $(\beta^2 - \gamma < 0)$ .

Dem Faktor  $(x-d)^m$  des Nennerpolynoms entsprechen die Partialbrüche  $\frac{A_0}{(x-d)} + \frac{A_1}{(x-d)^2} + \dots + \frac{A_{m-1}}{(x-d)^m}$ ,

dem Faktor  $(x^2-2\beta x + \gamma)^n$  die Partialbrüche  $\frac{A_1 x + B_1}{(x^2-2\beta x + \gamma)} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2-2\beta x + \gamma)^2} + \dots + \frac{A_n x + B_n}{(x^2-2\beta x + \gamma)^n}$ .

Bsp.:  $\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$  Zähleridentität:  $1 \stackrel{!}{=} A(x+1) + B(x-1)$

Bestimmung von A, B: 1. Weg: Koeffizientenvergleich  $0x + 1 = (A+B)x + (A-B) \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \Rightarrow A = -B = \frac{1}{2}$

2. Weg:  $x=1: 1 = A \cdot 2, x=-1: 1 = B \cdot (-2) \Rightarrow A, B$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1}$$

Bsp.:  $\frac{1+x+x^2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$  :  $1+x+x^2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)$  ;  $x=-1: 1 = A \cdot 2 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$   
 $x=0: 1 = A + C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$  ;  $x^2: 1 = (A+B)x^2 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$

Bsp.:  $\frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$  ( $A=1, B=2, C=1$ )

III. Integration der Partialbrüche:  $\int \frac{A}{x-d} dx = A \cdot \log|x-d|$  ,  $\int \frac{A}{(x-d)^n} dx = \frac{-A}{n-1} \frac{1}{(x-d)^{n-1}}$  ,  $n > 1$

$$\int \frac{Bx+C}{x^2-2\beta x + \gamma} dx = \frac{B}{2} \log(x^2-2\beta x + \gamma) + (C+B\beta) \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma-\beta^2}} \cdot \arctan \frac{x-\beta}{\sqrt{\gamma-\beta^2}} \quad , \beta^2 - \gamma < 0$$

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2-2\beta x + \gamma)^n} dx = \frac{B}{2} \cdot \frac{-1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x^2-2\beta x + \gamma)^{n-1}} + (C+B\beta) \cdot I_n \quad , \text{ wobei: } I_1 = \frac{1}{\lambda} \arctan \frac{u}{\lambda} \quad , u = x-\beta, \lambda = \sqrt{\gamma-\beta^2}$$
$$I_{n+1} = \frac{1}{2(n\lambda^2)} \left( \frac{u}{(u^2+\lambda^2)^n} + (2n-1) \cdot I_n \right)$$

### Kurven in Parameterdarstellung

Bogenlänge: Der Weg  $t \mapsto (x(t), y(t))$ ,  $t \in [a, b]$  ist stetig differenzierbar auf  $[a, b]$ , und es sei  $(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \neq 0$  auf  $[a, b]$ . Dann gilt für die Länge  $L$  des Wegs:  $L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$ .

Spezialfälle: - explizite Darstellung:  $y = f(x)$ . Dann gilt:  $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ .  
- Polardarstellung:  $r(\varphi)$ ,  $\varphi$ . Dann gilt:  $L = \int_a^b \sqrt{r^2(\varphi) + \dot{r}^2(\varphi)} d\varphi$ ,  $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}$ ,  $\varphi \in [\alpha, \beta]$ .

Bsp.: Logarithmische Spirale:  $r(\varphi) = e^{k\varphi}$ ,  $\varphi \in ]-\infty, 0]$   $\Rightarrow L = \int_{-\infty}^0 \sqrt{e^{2k\varphi} + k^2 e^{2k\varphi}} d\varphi = \sqrt{1+k^2} \int_{-\infty}^0 e^{k\varphi} d\varphi = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}$

Tangente an die Kurve  $t \mapsto (x(t), y(t))$  im Punkt  $(x(t), y(t))$ :  $u \mapsto (x(t) + u \dot{x}(t), y(t) + u \dot{y}(t))$ ,  $u \in ]-\infty, +\infty[$

Normale:  $u \mapsto (x(t) - u \dot{y}(t), y(t) + u \dot{x}(t))$ ,  $u \in ]-\infty, +\infty[$

Krümmungskreis: Radius  $\rho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}$ , Mittelpunkt  $M: (x, y) + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \cdot (-\dot{y}, \dot{x})$

Def.: Krümmung  $\kappa := \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$  ( $\Rightarrow \rho = \frac{1}{|\kappa|}$ ), explizite Darstellung:  $\kappa = \frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{3/2}}$ ,  $y = f(x)$

$\kappa > 0 \Leftrightarrow$  Die Kurve krümmt sich bei wachsendem  $t$  (Parameter) nach links.

### Funktionsfolgen

Def.: Die Funktionsfolge  $(f_n)$  konvergiert auf dem Intervall  $A$  punktweise gegen eine Funktion  $f$ , heißt: Zu jedem  $x \in A$  und jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$ .

Def.: Die Funktionsfolge  $(f_n)$  konvergiert auf dem Intervall  $A$  gleichmäßig gegen eine Funktion  $f$ , heißt: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $x \in A$  gilt:  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$ .

Satz: Der gleichmäßige Limes einer Folge stetiger Funktionen ist stetig.

Cauchy-Kriterium: Die Funktionsfolge  $(f_n)$  konvergiert genau dann gleichmäßig auf dem Intervall  $A$ , wenn sie eine gleichmäßige Cauchy-Folge ist, d.h. zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $x \in A$  gilt:  $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0$ .

Cauchy-Kriterium für Funktionsreihen: Die Funktionsreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  konvergiert genau dann gleichmäßig auf dem Intervall  $A$ , wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0$  existiert, so daß für alle  $x \in A$  gilt:  $|\sum_{k=n}^{\infty} f_k(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$ .

Majorkantenkriterium: Besitzt die Funktionsreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  auf  $A$  eine konvergente Majorante  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  (keine Funktionsfolge!), so ist die Reihe auf  $A$  gleichmäßig konvergent. Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  ist eine Majorante für die Funktionsreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ , wenn gilt:  $|f_k(x)| \leq c_k \quad \forall x \in A \quad \forall k \in \mathbb{N}$ .

Bsp.:  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  konvergiert auf jedem Bereich  $A_0 := \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq R\}$  gleichmäßig, denn die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k}{k!}$  ist eine konvergente Majorante auf  $A_0 \Rightarrow \exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  ist auf  $A_0$  stetig. Da  $R$  beliebig war:  $\exp$  ist auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig. Aber:  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  konvergiert nicht gleichmäßig auf ganz  $\mathbb{R}$ .

Satz: Die Funktionenfolge  $(f_n)$  konvergiert auf  $A := [a, b]$  gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion  $f$ . Sei  $x_0 \in [a, b]$ ,  $f_n$  stetig auf  $A \forall n$ ;  $F_n: x \mapsto \int_{x_0}^x f_n(t) dt$ ,  $F: x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$ . Dann konvergiert auch die Folge  $(F_n)$  gleichmäßig gegen  $F$ . ( $\lim \int \dots = \int \lim \dots$ )

Bsp.: Geom. Reihe:  $1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x}$ ,  $|x| < 1$ . Gleichmäßige Konvergenz auf  $[-q, q]$ ,  $0 < q < 1$  (kons. Majorante  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ )  $\Rightarrow \lim (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{x^{n+1}}{n+1}) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \log(1+x)$ ,  $|x| < 1$

Satz: Es sei  $(f_n)$  eine Folge auf  $A := [a, b]$  differenzierbarer Funktionen. Die Folge der Ableitungen  $(f'_n)$  konvergiert gleichmäßig auf  $A$ ,  $\lim f_n(x_0)$  existiert in mindestens einem Punkt  $x_0 \in A$ . Dann konvergiert die Folge  $(f_n)$  gleichmäßig auf  $A$  gegen eine differenzierbare Funktion  $f$ , und es ist  $f' = \lim f'_n$  auf  $A$ .

Gleichmäßiges Integrieren und Differenzieren von Funktionenreihen: (vgl. mit den obigen Sätzen)

(a) Ist die Funktionenreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$  auf  $A := [a, b]$  gleichmäßig konvergent, und sind alle  $f_k$  stetig, so gilt:  $\lim \int \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) dt = \int (\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)) dt$ .

(b) Eine Funktionenreihe "darf" gliedweise differenziert werden, wenn die Reihe der Ableitungen gleichmäßig konvergiert und die Reihe selbst in mindestens einem Punkt konvergiert.

Bsp.:  $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$  (konvergiert für  $x=0$ ), Reihe der Ableitungen:  $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \xrightarrow{\lim} \frac{1}{1+x^2}$ ,  $x \in [-q, q]$ ,  $0 < q < 1$  (geom. Reihe).  $\Rightarrow x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \xrightarrow{\lim} f(x)$  auf  $[-q, q]$  und  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$   
 $\Rightarrow f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$

### Integrale mit Parameter

$$\int_a^b f(x, \lambda) dx =: F(\lambda)$$

Satz: Ist die Funktion  $f: [a, b] \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Rechteck  $[a, b] \times [\alpha, \beta]$  stetig, so ist  $F$  stetig auf  $[\alpha, \beta]$ .

Satz: Ist die Funktion  $f$  nach  $\lambda$  differenzierbar, und ist die Ableitung  $f_2 := \frac{df}{d\lambda}$  auf dem Rechteck  $[a, b] \times [\alpha, \beta]$  stetig, so ist  $F$  differenzierbar, und es gilt:  $F'(\lambda) = \int_a^b f_2(x, \lambda) dx$ .  
 Kurz:  $\frac{d}{d\lambda} \int_a^b f(x, \lambda) dx = \int_a^b \frac{d}{d\lambda} f(x, \lambda) dx$ .

### Mehrdimensionale Differentialrechnung

Satz: Es sei  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $(x, y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ . In  $(x, y)$  existieren und seien stetig:  $f, f_{,1}, f_{,2}, f_{,12}, f_{,21}$ . Dann gilt:  $f_{,12}(x, y) = f_{,21}(x, y)$ .

Def.: Eine Funktion  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt differenzierbar an der Stelle  $\underline{x}$ , wenn es eine lineare Abbildung  $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  gibt, so daß gilt:  $f(\underline{x} + \underline{h}) - f(\underline{x}) = L\underline{h} + o(\underline{h}) \quad \forall \underline{h} \in \mathbb{R}^m$ .  
 Bezeichnung:  $L =: f_{\#}(\underline{x})$  ... Ableitung von  $f$  an der Stelle  $\underline{x}$ .

Satz: Ist die Funktion  $f$  differenzierbar an der Stelle  $\underline{x}$ , so ist sie stetig an der Stelle  $\underline{x}$ .

Satz: Es sei die Funktion  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeben durch die Funktionen  $f_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Sämtliche partiellen Ableitungen  $f_{i,k}$  existieren und seien stetig an einer Stelle  $\underline{x}$ . Dann ist  $f$  differenzierbar an der Stelle  $\underline{x}$ , und  $f_{\#}(\underline{x})$  ist durch die Jacobische Matrix gegeben.

Jacobische Matrix:  $[f_{\#}(\underline{x})] = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \dots & \frac{df_1}{dx_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{df_n}{dx_1} & \dots & \frac{df_n}{dx_m} \end{bmatrix}_{\underline{x}} = \left[ \frac{d(f_1, \dots, f_n)}{d(x_1, \dots, x_m)} \right]_{\underline{x}} = [f_{i,k}]_{\underline{x}}, \quad f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f = (f_1, \dots, f_n)$

Spezialfälle:

①  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ : Def.: Gradient von  $f$ :  $\text{grad } f := \left( \frac{df}{dx_1}, \frac{df}{dx_2}, \dots, \frac{df}{dx_m} \right) = f_{\#}$

Totales Differential von  $f$  an der Stelle  $\underline{x}$ :  $\text{grad } f(\underline{x}) \cdot \underline{h} = \frac{df(\underline{x})}{dx_1} h_1 + \dots + \frac{df(\underline{x})}{dx_m} h_m$

$\text{grad } f(\underline{x})$  zeigt in Richtung der größten Zunahme von  $f$  an der Stelle  $\underline{x}$  und steht senkrecht auf der Niveaufäche von  $f$  an der Stelle  $\underline{x}$ .

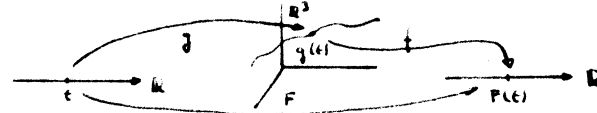
②  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ :  $[f_{\#}] = \begin{bmatrix} f'_1 \\ \vdots \\ f'_n \end{bmatrix}$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)$ ,  $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $f'(t) := f_{\#}(t)$ ,  $f'(t) \cdot h$  ... Tangentialvektor

Vergallgemeinerte Kettenregel: Ist die Funktion  $f$  differenzierbar an der Stelle  $\underline{x}$ , die Funktion  $g$  differenzierbar an der Stelle  $f(\underline{x})$ , so ist  $g \circ f$  differenzierbar an der Stelle  $\underline{x}$ , und es gilt:

$$(g \circ f)_{\#}(\underline{x}) = g_{\#}(f(\underline{x})) \cdot f_{\#}(\underline{x})$$

Bsp.:  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (g_1(t), g_2(t), g_3(t))$   
 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$   
 $F := f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(g_1(t), g_2(t), g_3(t))$

$$\Rightarrow F'(t) = f_x(g(t)) \cdot g_1'(t) + f_y(g(t)) \cdot g_2'(t) + f_z(g(t)) \cdot g_3'(t) = \left( \frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz} \right)_{g(t)} \cdot \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \\ g_3'(t) \end{pmatrix} = f_x(g(t)) \cdot g_1'(t) + \dots$$



## Mittelwertsatz:

Satz: Es sei die Funktion  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  differenzierbar auf  $A$ , und es liegen die Punkte  $a, b$  zusammen ihrer Verbindungsstrecke  $S$  in  $A$ . Dann existiert ein  $\xi \in S$  mit:  $f(b) - f(a) = \text{grad } f(\xi) \cdot (b - a)$ .

Satz: Es sei die Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar auf der Verbindungsstrecke  $S$  von  $a$  bis  $b$ . Dann existiert ein  $\xi \in S$  mit:  $|f(b) - f(a)| \leq \|f_\xi(\xi)\| \cdot |b - a|$ .

## Extrema von Funktionen der Art: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ :

Def.: Die Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt stationär an der Stelle  $x$ , wenn gilt:  $\text{grad } f(x) = 0$ .

Satz: Es sei  $a$  eine Extremalstelle der Funktion  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Dann gilt notwendigerweise eine der Aussagen

- (a)  $a$  ist ein Randpunkt von  $A$ ,
- (b)  $f$  ist nicht differenzierbar an der Stelle  $a$ ,
- (c)  $f$  ist stationär an der Stelle  $a$ .

Dieser Satz sagt nichts über die Existenz der Extremalstellen aus; diese muß auf andere Weise gezeigt werden.

Satz: Die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  besitze im Punkt  $(x_0, y_0)$  stetige partielle Ableitungen 2. Ordnung;  $(x_0, y_0)$  sei innerer Punkt des Definitionsbereiches von  $f$ ;  $f$  sei stationär an der Stelle  $(x_0, y_0)$ .

$\Delta := f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2$ . Dann gilt:

- (a)  $\Delta > 0$  und  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$  (oder  $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$ )  $\Rightarrow (x_0, y_0)$  ist lokales Minimum,
- (b)  $\Delta > 0$  und  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$  (oder  $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$ )  $\Rightarrow (x_0, y_0)$  ist lokales Maximum,
- (c)  $\Delta < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$  ist keine lokale Extremalstelle.

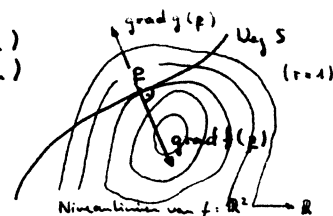
Satz über Extrema mit Nebenbedingungen: Die Funktionen  $f, g_1, \dots, g_r: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  seien in einer Umgebung von  $p \in \mathbb{R}^n$  definiert und stetig differenzierbar in  $p$ .  $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) = 0 \text{ und } g_2(x) = 0 \text{ und } \dots g_r(x) = 0\}$ . Die  $r$  Vektoren  $\text{grad } g_1, \dots, \text{grad } g_r$  seien linear unabhängig an der Stelle  $p \in S$ . Die Funktion  $f|_S$  besitze an der Stelle  $p$  ein lokales Extremum. Dann existieren Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$  mit  $\text{grad } f(p) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot \text{grad } g_i(p)$ .

Die Funktionen  $g_1, \dots, g_r$  heißen Nebenbedingungen, die Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  Lagrange'sche Multiplikatoren.

Bemerkungen: Umwenden muß die Existenz der Extremalstelle gesondert nachgewiesen werden. - Zur Bestimmung von  $p = (p_1, \dots, p_n)$  ist das Gleichungssystem

$$\begin{cases} g_1(p) = 0, g_2(p) = 0, \dots, g_r(p) = 0 \\ \text{grad } f(p) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot \text{grad } g_i(p) \end{cases} \quad \begin{matrix} (r \text{ Gleichungen}) \\ (n \text{ Gleichungen}) \end{matrix}$$

mit den Unbekannten  $p_1, \dots, p_n, \lambda_1, \dots, \lambda_r$  zu lösen.



Ist  $p$  Extremalstelle von  $f$  relativ zum Umg  $S$ , so berührt die Nivellinie von  $f$  durch  $p$  den Umg  $S$  in  $p$ .

Bsp.: Bestimme die Seiten  $x$  und  $y$  des Rechtecks, das bei gegebenem Umfang  $U_0$  die maximale Fläche besitzt. - Lösung:

$$f: (x, y) \mapsto x \cdot y \quad (\text{Fläche})$$

$$g: (x, y) \mapsto 2x + 2y - U_0 \quad (\text{Nebenbedingung})$$

$$\Rightarrow \text{Gleichungssystem: } \begin{cases} g(x, y) = 0 \\ \text{grad } f(x, y) = \lambda \cdot \text{grad } g(x, y) \end{cases}$$

$$\text{grad } f(x, y) = (y, x)$$

$$\text{grad } g(x, y) = (2, 2)$$

$$\text{D.h.: } \begin{cases} 2x + 2y - U_0 = 0 \\ y = \lambda \cdot 2 \\ x = \lambda \cdot 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = y = \frac{U_0}{4} \quad (\text{Quadrat})$$

## Die Norm einer linearen Abbildung:

Def.: Unter der Norm der linearen Abbildung  $L$  versteht man die reelle Zahl  $\|L\| := \sup \left\{ \frac{\|Lz\|}{\|z\|} \mid z \neq 0 \right\} = \sup \{ \|Lz\| \mid \|z\| = 1 \}$ .

$$\underline{1} \quad \|L + M\| \leq \|L\| + \|M\|, \quad \|LM\| \leq \|L\| \cdot \|M\| \quad (LM = L \circ M), \quad \|L\| \cdot \|z\| \geq \|Lz\|$$

Satz: Die Funktion  $d(L, M) := \|L - M\|$  ist eine Metrik auf dem Raum  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  aller linearen Abbildungen von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^n$ , d.h. es gilt:

$$(a) \quad d(L, M) = d(M, L)$$

$$\text{bzw. } \|L - M\| = \|M - L\|,$$

$$(b) \quad d(L, M) = 0 \Leftrightarrow L = M$$

$$\text{bzw. } \|L - M\| = 0 \Leftrightarrow L = M,$$

$$(c) \quad d(L, M) \leq d(L, H) + d(H, M)$$

$$\text{bzw. } \|L - M\| \leq \|L - H\| + \|H - M\| \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

2 Es sei  $L$  eine lineare Abbildung, die durch die Matrix  $[L]_{ik}$  dargestellt wird. Dann gilt:

$$(a) \quad \|L\| \geq |L_{ik}| \quad \forall i, k,$$

$$(b) \quad \|L\| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n (L_{ik})^2}$$

Satz: Die Abbildung  $\Phi: A \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ,  $x \longmapsto L_x = [\lambda_{ik}(x)]$  ist genau dann stetig an der Stelle  $x_0$ , wenn alle  $\lambda_{ik}$  an der Stelle  $x_0$  stetig sind.

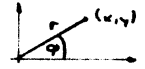
Die Abbildung einer linearen Funktion: Es sei  $L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  eine lineare Abbildung. Dann gilt:  $L_x(x) \equiv L$ .

Der Satz über die Umkehrabbildung:

Satz: Es seien  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge,  $f: A \longrightarrow \mathbb{R}^m$  eine stetig differenzierbare Funktion und  $a$  ein fester Punkt von  $A$ ,  $f(a) =: b$ . Ist  $f_x(a)$  regulär, so bildet  $f$  (bzw. die Einschränkung  $f|_U$ ) eine geeignete offene Umgebung  $U$  von  $a$  bijektiv auf eine offene Umgebung  $V$  von  $b$  ab; dabei ist  $f_x$  auf ganz  $U$  regulär. Die zugehörige Umkehrabbildung  $g := f|_U^{-1}: V \longrightarrow U$  ist stetig differenzierbar, und es gilt:  $g_x(b) = (f_x(a))^{-1}$ .

Bemerkung:  $f_x(a)$  regulär  $\Leftrightarrow \det[f_x(a)] \neq 0$  (Funktionaldeterminante)

Anwendungen:

① Polarkoordinaten:  $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(r, \varphi) \longmapsto (x, y) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \Rightarrow f_x(r, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix}$    
 $\Rightarrow \det[f_x(r, \varphi)] = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r \neq 0, r \neq 0 \Rightarrow f_x(r, \varphi)$  ist regulär für  $r \neq 0$ .  
 $\Rightarrow$  lokal existiert eine Umkehrabbildung  $g: (x, y) \longmapsto (r(x, y), \varphi(x, y)) = (\sqrt{x^2+y^2}, \varphi(x, y))$   
 $g_x(x, y) = \begin{bmatrix} r_x & r_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{bmatrix} = (f_x(r, \varphi))^{-1} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} r \cos \varphi & r \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{r^2} & \frac{y}{r^2} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_x = \frac{-y}{x^2+y^2}, \varphi_y = \frac{x}{x^2+y^2}$

② Näherungsweise Bestimmung von Nullstellen einer Funktion  $f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$  durch Linearisierung der Umkehrabbildung (Verallgemeinerung des Newtonschen Verfahrens): Bsp.: Bestimme den Schnittpunkt der Kurven  $x^2 = y^3$  und  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ , der in der Nähe von  $(2,2)$  liegt. - Lösung:  
 $f: (x, y) \longmapsto (x^2 - y^3, (x-1)^2 + (y-1)^2 - 1)$  Gesucht:  $f^{-1}(0,0) =: (\xi, \eta)$  (denn:  $f(\xi, \eta) = (0,0)$ )  
Global existiert keine Umkehrabbildung (denn  $f$  besitzt unendlich Nullstellen), dagegen lokal.

$$[f_x(2,2)] = \begin{bmatrix} 2x & -3y^2 \\ 2(x-1) & 2(y-1) \end{bmatrix}_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 4 & -12 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det[f_x(2,2)] = 32 \neq 0, [f_x^{-1}(f(2,2))] = [f_x^{-1}(4,-4)] = [f_x(2,2)]^{-1} = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$
$$f^{-1}(0,0) \approx f^{-1}(4,-4) + f_x^{-1}(4,-4)(4,-4) = (2,2) + \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} = (1,875, 1,625) =: (\xi, \eta)$$

Der Satz über implizite Funktionen:

Satz (Spezialfall  $m=n=1$  des allgemeinen Satzes): Es sei die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  in einer Umgebung von  $(a,b)$  stetig differenzierbar,  $f(a,b) = 0, f_y(a,b) \neq 0$ . Dann existieren Umgebungen  $U := U_\delta(a) \subseteq \mathbb{R}$  und  $V := U_\delta(b) \subseteq \mathbb{R}$  so, daß zu jedem  $x \in U$  genau ein  $y =: g(x) \in V$  existiert mit  $f(x,y) = 0$ . Die Funktion  $g: U \longrightarrow V$  ist stetig differenzierbar, und es gilt:  $g'(x) = -\frac{f_x}{f_y}|_{(x,g(x))}$ .

D.h. in einer geeigneten Umgebung von  $(a,b)$  läßt sich die Gleichung  $f(x,y) = 0$  nach  $y$  auflösen - oder: in einer geeigneten Umgebung von  $(a,b)$  läßt sich die Kurve  $f(x,y) = 0$  in der Form  $y = g(x)$  darstellen.

Bsp.: Tangente an eine Kurve:  $e^{x+y} + x - 2y - 1 =: f(x,y) = 0, f(0,0) = 0, f_x(0,0) = e^{x+y} + 1|_{(0,0)} = 2, f_y(0,0) = e^{x+y} - 2|_{(0,0)} = -1 \neq 0 \Rightarrow g'(0) = -\frac{f_x}{f_y}|_{(0,0)} = 2$  (Tangente im Nullpunkt)

Satz (allgemeine Form): Es sei  $A$  eine offene Menge des  $\mathbb{R}^{m+n}$  und  $f: A \longrightarrow \mathbb{R}^n, (x,y) \longmapsto f(x,y)$  eine stetig differenzierbare Funktion mit  $f(a,b) = 0$ . Ist dann die Determinante  $\det \left[ \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right]_{(a,b)} \neq 0$ , so gibt es Umgebungen  $U := U_\delta(a) \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $V := U_\delta(b) \subseteq \mathbb{R}^n$  derart, daß die Gleichung  $f(x,y) = 0$  genau eine Lösung  $y =: g(x)$  besitzt. Die Funktion  $g: U \longrightarrow V$  ist stetig differenzierbar (und es könnte eine Formel für  $g_x(x)$  angegeben werden).

Uneigentliche Integrale (Nachtrag)

Def.: Es sei die Funktion  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  auf dem Intervall  $[a,b], b < \infty$ , nicht Riemann-integrierbar, aber auf  $[a,x]$  für alle  $x \in [a,b]$  integrierbar. Dann heißt das Integral  $\int_a^b f(t) dt := \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$  uneigentlich an der oberen Grenze, wenn der Limes existiert (analog für uneigentlich an der unteren Grenze).

Bsp.:  $\int_0^\infty e^{-x} dx := \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-x} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} (-e^{-x} + 1) = 1$

Vergleichskriterium: Für die Funktionen  $f$  und  $g$  gelte:  $|f(t)| \leq g(t) \forall t \in [a,b]$ . Existiert dann das Integral  $\int_a^b g(t) dt$ , so existiert auch das Integral  $\int_a^b f(t) dt$ .

P  $\int_0^\infty \frac{1}{t^\alpha} dt$  konvergiert (d.h. existiert) für  $\alpha > 1$  und divergiert für  $\alpha \leq 1$ .  
 $\int_0^\infty \frac{1}{t^\alpha} dt$  konvergiert für  $\alpha < 1$  und divergiert für  $\alpha \geq 1$ .

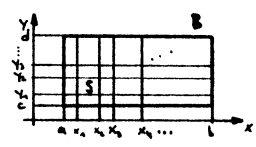
Vergleich von uneigentlichen Integralen mit Reihen:

Satz: Die Funktion  $f$  sei positiv und monoton fallend auf dem Intervall  $[0, \infty[$ . Dann haben das uneigentliche Integral  $\int_0^\infty f(x) dx$  und die Reihe  $\sum_{k=0}^\infty f(k)$  dasselbe Konvergenzverhalten (d.h. beide konvergieren oder beide divergieren).

# Mehrdimensionale Integralrechnung

Riemannsches Integral im  $\mathbb{R}^2$ : (im  $\mathbb{R}^n$  analog; statt Rechtecken: Quader)

Def.: Teilung  $P$  eines achsenparallelen Rechtecks  $B$ : Gesamtheit der Teilrechtecke  $S$ :  
 $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ ,  $j = 0, \dots, m-1$ . Dabei gilt:  
 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ,  $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$ ,  $P = [a, b] \times [c, d]$ .



Eine Teilung  $P'$  heißt feiner als die Teilung  $P$ , wenn jedes Teilrechteck von  $P$  Vereinigung von Teilrechtecken von  $P'$  ist. - Sind  $P$  und  $P'$  Teilungen von  $B$ , so existiert eine gemeinsame Verfeinerung  $P''$ .  
 Im folgenden sei  $B$  ein achsenparalleles Rechteck,  $P$  eine Teilung von  $B$ ,  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion.

Def.: Untere Riemannsche Summe:  $\underline{\sum}_{B,P} f := \sum_{S \in P} \inf_S f \cdot \mu(S)$ ,  $\mu(S)$ : Flächeninhalt von  $S$ ,  
 Obere Riemannsche Summe:  $\overline{\sum}_{B,P} f := \sum_{S \in P} \sup_S f \cdot \mu(S)$ .

Satz: Ist die Teilung  $P'$  feiner als die Teilung  $P$ , dann gilt:  $\underline{\sum}_{B,P} f \leq \underline{\sum}_{B,P'} f \leq \overline{\sum}_{B,P'} f \leq \overline{\sum}_{B,P} f$ .

Korollar: Für beliebige Teilungen  $P, P'$  von  $B$  gilt:  $\underline{\sum}_{B,P} f \leq \overline{\sum}_{B,P'} f$ .

Die Definitionen der Begriffe: unteres Riemannsches Integral, oberes Riemannsches Integral, Riemann-integrierbar, Riemannsches Integral sind dieselben wie in der eindimensionalen Integralrechnung (s. S. 5/6).  
 $(\int_a^b f dx := \sup_P \underline{\sum}_{B,P} f, \int_a^b f dx := \inf_P \overline{\sum}_{B,P} f$ ; das oben und das untere Integral existieren immer.)

Def.: Es sei  $A \subseteq B$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion,  $f_A: B \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch:  $f_A(x) = f(x)$  falls  $x \in A$ ,  $f_A(x) = 0$  falls  $x \in B \setminus A$ . Dann definiert man:  $\int_A f dx := \int_B f_A dx$ .

Def.: Eine Teilmenge  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  heißt Nullmenge, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  endlich viele achsenparallele Rechtecke  $S_1, \dots, S_n$  existieren, für die gilt:  $D \subseteq S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$  und  $\mu(S_1) + \mu(S_2) + \dots + \mu(S_n) < \varepsilon$ .



P Der Graph einer stetigen Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist in  $\mathbb{R}^2$  eine Nullmenge.

P Ist  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  eine Nullmenge und erfüllt die Funktion  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Lipschitzbedingung (d.h.: es existiert  $C \in \mathbb{R}$  mit  $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$  für alle  $x, y \in A$ ), so ist das Bild  $f(A)$  eine Nullmenge.

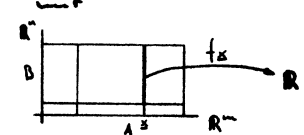
P Die Vereinigung endlich vieler Nullmengen ist eine Nullmenge.

Def.: Eine Funktion  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  heißt zulässig, wenn sie beschränkt ist und stetig außer in einer Nullmenge. - Eine Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  heißt zulässig, wenn sie beschränkt ist und der Rand  $\partial A$  eine Nullmenge ist.

Satz: Ist  $A$  eine zulässige Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$ , so ist eine auf  $A$  zulässige Funktion integrierbar auf  $A$ . Insbesondere ist eine auf einem achsenparallelen Rechteck  $B$  zulässige Funktion integrierbar auf  $B$ .

Def.: Flächeninhalt einer beliebigen zulässigen Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ :  $\mu(A) := \int_A 1 dx$ .

Mittelwertsatz der Integralrechnung: Es sei  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  zulässig. Dann gilt:  
 (a)  $\inf_A f \cdot \mu(A) \leq \int_A f dx \leq \sup_A f \cdot \mu(A)$ .  
 (b) Ist  $A$  zusätzlich kompakt und zusammenhängend, so existiert  $\xi \in A$  mit  $\int_A f dx = \mu(A) \cdot f(\xi)$ , falls  $f$  auf  $A$  stetig ist.



## Berechnung von mehrdimensionalen Integralen:

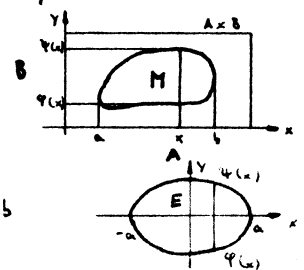
Def.: Zu einer Funktion  $f: (A \times B) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  definieren wir die Funktion  $f_x: B \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y \mapsto f(x, y)$ ;  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $B \subseteq \mathbb{R}^m$ .

Satz: Die Funktion  $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  sei integrierbar. Dann sind die Funktionen  $x \mapsto \int_B f_x dy$  und  $x \mapsto \int_A f_x dx$  integrierbar auf  $A$ , und es gilt:  $\int_{A \times B} f dx dy = \int_A (\int_B f_x dy) dx = \int_B (\int_A f_x dx) dy$ .

Im Normalfall ist  $f_x$  auf  $B$  integrierbar, dann gilt die folgende Reduktionsformel:

$$\int_{A \times B} f dx dy = \int_A (\int_B f_x dy) dx$$

Anwendung:  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ .  $\int_B f_x dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy =: F(x)$   
 $\Rightarrow \int_B f dx dy = \int_A F(x) dx = \int_a^b (\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$



Bsp.: Flächeninhalt der Ellipse  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ :  $\mu(E) = \int_E 1 dx dy$   
 $\mu(E) = \int_{-a}^a dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy = \int_{-a}^a 2b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = 2b \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a \cos t dt = 2ab (\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi ab$   
 $[\frac{x}{a} = \cos t, dx = -a \sin t dt, \sqrt{1 - x^2/a^2} = \sin t, t \in [-\pi/2, \pi/2], y(x) = -y_1(x) = b \sqrt{1 - x^2/a^2}]$

## 12. Volumentransformationen bei linearen Abbildungen:

Satz: Es sei  $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine lineare Abbildung,  $A \subseteq \mathbb{R}^m$  eine zulässige Menge. Dann ist auch das Bild  $L(A)$  zulässig, und es gilt:  $\mu(L(A)) = \mu(A) \cdot |\det[L]|$ .

Anwendungen:

- Das durch die Vektoren  $\underline{v}_i = (v_{i1}, \dots, v_{im})$ ,  $i = 1, \dots, m$  aufgespannte Parallelepiped besitzt das Volumen  $|\det[\underline{v}_i]|$ .
- Das durch  $\underline{0}$  und die Punkte  $\underline{a}_i = \underline{e}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , aufgespannte  $m$ -Simplex besitzt das Volumen  $\frac{1}{m!} \cdot \underline{a}_1 \cdot \dots \cdot \underline{a}_m$ .
- Volumen des  $m$ -dimensionalen Kugel  $B_{m,R} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| \leq R\}$ :  $\mu(B_{m,R}) = \mu(B_{m,1}) R^m$ . Dabei gilt für das Volumen der Einheitskugel:  $\mu(B_{2k+1,1}) = \frac{2^{k+1}}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)} \pi^{k+1}$ ,  $\mu(B_{2k+2,1}) = \frac{2^{k+2}}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k+2)} \pi^{k+1}$ .

## Variablentransformationen bei mehrdimensionalen Integralen:

Satz: Es seien  $A, B$  kompakte und zulässige Teilmengen des  $\mathbb{R}^m$ . Die Funktion  $g$  bilde  $A$  auf  $B$  ab und sei fast überall injektiv;  $g$  sei fast überall regulär. Die Funktion  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig. Dann gilt:  
 $\int_B f(x) dx = \int_A f(g(u)) \cdot |\det g_u(u)| du$

Anwendungen:

- Polarkoordinaten in der Ebene:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$   
 $g: (r, \varphi) \mapsto (x, y)$ ,  $\det[g_u] = \det \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix} = r$
- Zylinderkoordinaten im  $\mathbb{R}^3$ :  $g: (r, \varphi, z) \mapsto (x, y, z)$   
 $x = r \cos \varphi$   
 $y = r \sin \varphi$ ,  $\det[g_u] = \det \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r$   
 $z = z$

Bsp.: Volumen des Durchdringungskörpers eines Zylinders mit einer Kugel:

$$V = \int_0^R 1 \, d\mu_{\text{Kug}} = \int_A 1 \cdot r \, d\mu_{\text{Zyl}} = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} dz = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot 2\sqrt{R^2-r^2} = \int_0^R 2\pi r \cdot 2\sqrt{R^2-r^2} dr = 4\pi \int_0^R r \sqrt{R^2-r^2} dr$$

$$= 4\pi \left[ -\frac{1}{3} (R^2-r^2)^{3/2} \right]_0^R = \frac{4\pi}{3} (R^3 - (R^2-R^2)^{3/2}) = \frac{4\pi}{3} R^3$$

- Kugelkoordinaten im  $\mathbb{R}^3$ :  $g: (r, \varphi, \psi) \mapsto (x, y, z)$ ,  $\det[g_u] = r^2 \sin \psi$   
 $x = r \cos \psi \cos \varphi$ ,  $y = r \cos \psi \sin \varphi$ ,  $z = r \sin \psi$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$

Bsp.: Trägheitsmoment der Kugel bezüglich eines Durchmessers:  $g = r \cos \psi$

$$\Theta = \int_{\text{Kug}} s^2 \, d\mu = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi \cdot r^2 \cos^2 \psi \cdot (r \cos \psi)^2 \cdot r^2 \sin \psi$$

$$= \int_0^R dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi \cdot r^6 \cos^2 \psi \sin \psi = \int_0^R dr \cdot r^6 \left[ -\frac{1}{3} \cos^3 \psi \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \int_0^R dr \cdot r^6 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \int_0^R r^6 dr = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{7} R^7 = \frac{2}{21} R^7$$

## Flächen im $\mathbb{R}^3$

### Das Vektorprodukt:

Def.:  $\underline{p} = (p_1, p_2, p_3)$ ,  $\underline{q} = (q_1, q_2, q_3)$ .  $\underline{p} \times \underline{q} = (p_2 q_3 - p_3 q_2, p_3 q_1 - p_1 q_3, p_1 q_2 - p_2 q_1)$

Eigenschaften des Vektorprodukts:

(a) Das Vektorprodukt ist bilinear und schief, d.h. es gilt:

$$(i) (\lambda_1 \underline{p}_1 + \lambda_2 \underline{p}_2) \times \underline{q} = \lambda_1 (\underline{p}_1 \times \underline{q}) + \lambda_2 (\underline{p}_2 \times \underline{q})$$

$$(ii) \underline{p} \times (\eta_1 \underline{q}_1 + \eta_2 \underline{q}_2) = \eta_1 (\underline{p} \times \underline{q}_1) + \eta_2 (\underline{p} \times \underline{q}_2)$$

$$(iii) \underline{q} \times \underline{p} = -(\underline{p} \times \underline{q})$$

(b) Für alle  $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$  gilt:

$$(\underline{p} \times \underline{q}) \cdot \underline{x} = \det \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & x_1 \\ p_2 & q_2 & x_2 \\ p_3 & q_3 & x_3 \end{bmatrix}$$

$|\underline{p} \times \underline{q}| \cdot |\underline{x}| \cdot \cos \varphi$  ist gleich dem Volumen des durch die Vektoren  $\underline{p}$ ,  $\underline{q}$ ,  $\underline{x}$  aufgespannten Parallelepipedes.

(c)  $\underline{p} \times \underline{q} = \underline{0} \iff \underline{p}, \underline{q}$  linear abhängig.

(d) Ist  $\underline{p} \times \underline{q} \neq \underline{0}$ , so steht  $\underline{p} \times \underline{q}$  senkrecht auf  $\underline{p}$  und auf  $\underline{q}$ , und das Tripel  $(\underline{p}, \underline{q}, \underline{p} \times \underline{q})$  ist positiv orientiert.

(e)  $|\underline{p} \times \underline{q}| = |\underline{p}| \cdot |\underline{q}| \cdot \sin \varphi$ ,  $\varphi$ : Winkel zwischen  $\underline{p}$  und  $\underline{q}$ .

### Berechnung des Flächeninhalts:

Def.: Es sei  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  eine kompakte zulässige Menge,  $N \subset A$  eine Nullmenge und  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine stetig differenzierbare, auf  $A \setminus N$  sowohl regulär als auch injektive Funktion. Dann besitzt  $S := f(A)$  den Flächeninhalt  $\omega(S) := \int_A |f_u(\underline{u}) \times f_v(\underline{u})| \, d\mu_2$ .

P Unter den Voraussetzungen der obestehenden Definition gilt: Die Vektoren  $f_u(\underline{u})$  und  $f_v(\underline{u})$  liegen tangential an  $S$ , der Vektor  $f_u(\underline{u}) \times f_v(\underline{u})$  steht normal auf  $S$  an der Stelle  $f(\underline{u})$ .

Bsp.: Flächeninhalt des durch die Vektoren  $\underline{u}, \underline{v}$  aufgespannten Parallelogramms:

$$f(u, v) = u \underline{e}_1 + v \underline{e}_2, \quad 0 \leq u, v \leq 1 \implies f_u = \underline{e}_1, \quad f_v = \underline{e}_2, \quad f_u \times f_v = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3$$

$$\omega(S) = \int_A |\underline{e}_3| \, d\mu_2 = \int_0^1 \int_0^1 1 \, du \, dv = 1$$

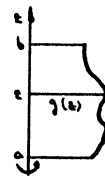
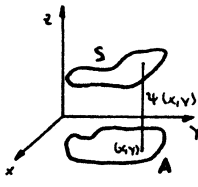
- ① Fläche  $S$  gegeben als Graph einer Funktion  $\Psi: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ :

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \Psi(x, y)\}$$

$$f: (x, y) \mapsto (x, y, \Psi(x, y)) \Rightarrow f_x = (1, 0, \Psi_x), f_y = (0, 1, \Psi_y)$$

$$\Rightarrow f_x \times f_y = (-\Psi_x, -\Psi_y, 1) \Rightarrow |f_x \times f_y| = \sqrt{\Psi_x^2 + \Psi_y^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \omega(S) = \int_A \sqrt{\Psi_x^2(x, y) + \Psi_y^2(x, y) + 1} \, d\mu_{xy} \quad (\Psi \text{ stetig diffbar auf } A)$$



- ② Rotationsflächen: "Meridian":  $z \mapsto g(z)$ ;  $f: (\varphi, z) \mapsto (g(z) \cos \varphi, g(z) \sin \varphi, z)$ ,  
 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $a \leq z \leq b \Rightarrow \omega(S) = 2\pi \int_a^b g(z) \sqrt{1 + g'(z)^2} \, dz$

Bsp.: Kugeloberfläche:  $g(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$ ,  $g'(z) = \frac{-z}{\sqrt{R^2 - z^2}} \Rightarrow \omega(S) = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - z^2} \sqrt{1 + \frac{z^2}{R^2 - z^2}} \, dz = 2\pi \int_{-R}^R R \, dz = 4\pi R^2$

### Vektoranalysis

Def.: Ein Vektorfeld ist eine Funktion  $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Ist  $v(x) = \underline{0}$  für alle  $x$ , so ist  $v$  ein homogenes Vektorfeld. Ein Vektorfeld der Form  $v(x) = f(r) \frac{x}{r}$ ,  $r := |x|$ ,  $f: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Zentralfeld. Das Gradientenfeld der Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist das Vektorfeld  $v(x) := \text{grad} f(x)$ .

### Linienintegrale:

Def.: Es sei  $v$  ein stetiges Vektorfeld und  $\gamma$  eine Kurve, gegeben durch die stetig differenzierbare Parameterdarstellung  $t \mapsto x(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ . Dann heißt  $W_\gamma := \int_a^b v(x(t)) \cdot x'(t) \, dt$  das Linienintegral bzw. die Arbeit von  $v$  längs  $\gamma$ .

Bsp.:  $v(x, y, z) = (y^2, xz, 1)$ ,  $\gamma: t \mapsto (t, t^2, t^3) [= (x(t), y(t), z(t))]$ ,  $0 \leq t \leq 1$   
 $W_\gamma = \int_0^1 (t^4, t^4, 1) \cdot (1, 2t, 3t^2) \, dt = \int_0^1 (t^4 + 2t^5 + 3t^2) \, dt = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{23}{15}$

Satz: Das Linienintegral ist unabhängig von der speziellen Parametrisierung der Kurve  $\gamma$ .

Durch diesen Satz erhält die von der Parametrisierung unabhängige Schreibweise des Linienintegrals erst ihren Sinn: Es sei  $dx := x'(t) \, dt$ . Dann gilt:  $W_\gamma = \int v \cdot dx$ .

- Def.: (i) Die Kurve  $\gamma$  sei durch die Parametrisierung  $t \mapsto x(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$  gegeben. Dann ist die zu  $\gamma$  inverse Kurve  $- \gamma$  durch die Parameterdarstellung  $t \mapsto x(1-t)$  definiert.  
 (ii) Die Kurven  $\gamma_1, \gamma_2$  seien durch  $t \mapsto x(t)$  und  $t \mapsto x(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$  gegeben,  $x(1) = x(0)$ .  
 Dann ist die Kurve  $\gamma_1 + \gamma_2$  durch  $t \mapsto x(2t)$ , falls  $0 \leq t \leq 1/2$ ,  $x(2t-1)$ , falls  $1/2 \leq t \leq 1$ , def.

Satz:  $U_{-\gamma} = -W_\gamma$ ,  $W_{\gamma_1 + \gamma_2} = W_{\gamma_1} + W_{\gamma_2}$ . -  $|v(x)| \leq M$  auf  $\gamma \Rightarrow |\int_\gamma v \cdot dx| \leq M \cdot L(\gamma)$   $L(\gamma) \dots$  Länge

### Konservative Felder:

Def.: Ein Vektorfeld  $v$  heißt konservativ oder exakt auf  $A$ , wenn für je zwei Kurven  $\gamma_1, \gamma_2$  in  $A$  mit gemeinsamem Anfangs- und Endpunkt gilt:  $\int_{\gamma_1} v \cdot dx = \int_{\gamma_2} v \cdot dx$ .

Satz: Das Vektorfeld  $v$  ist konservativ auf  $A$  genau dann, wenn für jede geschlossene Kurve  $\gamma$  in  $A$  gilt:  $\int_\gamma v \cdot dx = 0$ .

Satz: Es sei  $v$  ein stetiges Vektorfeld auf  $A$ ,  $A$  ein Gebiet, d.h. eine offen und zusammenhängende Menge, in  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist  $v$  konservativ auf  $A$  genau dann, wenn es eine stetige differenzierbare Funktion  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so daß für alle  $x \in A$  gilt:  $v(x) = \text{grad} f(x)$ .  
 Die Funktion  $f$  heißt in diesem Fall Potential von  $v$  und ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Es gilt:  $\int_\gamma v \cdot dx = f(q) - f(p)$ , wenn  $\gamma$  ein Weg in  $A$  mit Anfangspunkt  $p$  und Endpunkt  $q$  ist.

Korollar: Zentralfelder sind konservativ.  $\odot$

Satz: Ist  $v$  ein stetig differenzierbares Potentialfeld (= konservatives Feld), so gelten die Integrabilitätsbedingungen:  $v_{1,2} = v_{2,1}$ ,  $v_{1,3} = v_{3,1}$ ,  $v_{2,3} = v_{3,2}$  (3-dimensional).  
 Allgemein:  $v_{i,j} = v_{j,i}$   $\forall i, j$ .

Def.: Infinitesimale Rotation eines dreidimensionalen Vektorfeldes  $v$ :  
 $\text{rot } v := (v_{3,2} - v_{2,3}, v_{1,3} - v_{3,1}, v_{2,1} - v_{1,2})$ .

Ist  $v$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld, so ist  $\text{rot } v$  definiert und ein stetiges Vektorfeld. - Ist  $v$  ein stetig differenzierbares Potentialfeld, so gilt:  $\text{rot } v = 0$  (" $v$  ist wirbelfrei").

Satz: Das Vektorfeld  $v$  sei auf dem achsenparallelen Quader  $A$  stetig differenzierbar. Ist  $\text{rot } v = 0$  auf  $A$ , so ist  $v$  ein Potentialfeld auf  $A$ .

Def.: Argumentzunahme längs einer Kurve  $\gamma$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ :  $\int_{\gamma} \left( \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \right)$ . Ist  $\gamma$  eine geschlossene Kurve, so ist die Umlaufzahl von  $\gamma$  um  $0$  definiert als:  $\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left( \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \right)$ . Die Umlaufzahl ist eine ganze Zahl.  
 $[\gamma: t \mapsto (x(t), y(t)) : x = x(t), y = y(t), dx = x'(t) dt, dy = y'(t) dt]$

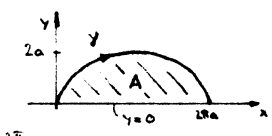
Die Greensche Formel:

Def.: Es sei  $\underline{v}$  ein zweidimensionales Vektorfeld,  $\underline{v}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ . Dann heißt  $\text{rot } \underline{v} := Q_x - P_y$  die Rotation des zweidimensionalen Vektorfeldes  $\underline{v}$ .

Greensche Formel: Es sei  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Gebiet mit stetig differenzierbarer parametrisierbarem Rand  $\partial A$ .  $\partial A$  sei so orientiert, daß das Gebiet  $A$  beim Durchlaufen von  $\partial A$  stets zur Linken liegt. Das Vektorfeld  $\underline{v}, \underline{v}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ , sei stetig differenzierbar auf  $A$ . Dann gilt:  $\int_{\partial A} \underline{v} \cdot d\underline{x} = \int_A \text{rot } \underline{v} \, d\mu_{xy}$   
 bzw.:  $\int_{\partial A} (P dx + Q dy) = \int_A (Q_x - P_y) \, d\mu_{xy}$ .

Anwendung: Formeln zur Berechnung des Flächeninhalts von  $A$ :  
 (i)  $\omega(A) = \int_{\partial A} x \, dy$  (ii)  $\omega(A) = - \int_{\partial A} y \, dx$  (iii)  $\omega(A) = \frac{1}{2} \int_{\partial A} (x \, dy - y \, dx)$ .

Bsp.: Fläche unter einem Zyklidenbogen:  $\gamma: t \mapsto (at - a \sin t, a - a \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .  $\omega(A) = - \int_{\partial A} y \, dx = - \int_0^{2\pi} y(t) x'(t) dt = - \int_0^{2\pi} (a - a \cos t) a \cos t \, dt$   
 (Das Rundstück auf der x-Achse liefert keinen Beitrag, weil dort  $y=0$  ist; um die richtige Orientierung zu erhalten, muß  $-y$  integriert werden.)  
 $\Rightarrow \omega(A) = \int_0^{2\pi} (a - a \cos t)^2 \, dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) \, dt = a^2 \left( t - 2 \sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = a^2 (2\pi + \pi) = 3\pi a^2$

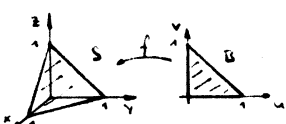


Der Satz von Stokes:

Def.: Eine Fläche  $S$  in  $\mathbb{R}^3$  sei durch eine stetig differenzierbare, fast überall regulär und injektive Parametrisierung  $f: B \rightarrow \mathbb{R}^3, \underline{u} \mapsto f(\underline{u})$ ,  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  kompakt und zulässig, gegeben:  $S := f(B)$ . Auf  $S$  sei durch  $\underline{n} := \frac{f_1 \times f_2}{|f_1 \times f_2|}$  eine ausgezeichnete Normalenrichtung festgelegt; man sagt,  $S$  sei orientiert.  $\underline{v}$  sei ein stetiges Vektorfeld in  $\mathbb{R}^3$ . Dann ist der Fluß des Feldes  $\underline{v}$  durch die Fläche  $S$  definiert durch:  $\Phi := \int_B \underline{v}(f(\underline{u})) \cdot (f_1(\underline{u}) \times f_2(\underline{u})) \, d\mu_{\underline{u}}$

Abgekürzte Schreibweisen:  $d\underline{u} := |f_1 \times f_2| \, d\mu$ ,  $d\underline{u} := (f_1 \times f_2) \, d\mu$ ,  $\underline{n} := \frac{f_1 \times f_2}{|f_1 \times f_2|}$ ,  $d\underline{u} = \underline{n} \cdot d\underline{u}$   
 $\Rightarrow \Phi = \int_B \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\underline{u} = \int_B \underline{v} \cdot d\underline{u}$ .

Satz: Das Flußintegral ist invariant gegenüber orientierungserhaltenden Parametertransformationen.

Bsp.:   $\underline{v}(x,y,z) = (yz, x^2+1, z)$ ,  $f: (u,v) \mapsto (u,v, 1-u-v)$   
 $\Rightarrow f_1 = (1, 0, -1)$ ,  $f_2 = (0, 1, -1) \Rightarrow f_1 \times f_2 = (1, 1, 1)$ ,  $d\underline{u} = (1, 1, 1) \, d\mu$   
 $\Rightarrow \Phi = \int_B \underline{v} \cdot d\underline{u} = \int_B (v(1-u-v), u^2+1, 1-u-v) \cdot (1, 1, 1) \, d\mu_{uv}$   
 $= \int_B (v - uv - v^2 + u^2 + 1 + 1 - u - v) \, d\mu_{uv} = \int_B (u^2 - v^2 - uv - u + 2) \, d\mu_{uv} = \dots$

Def.: Das Flächenstück  $S$  in  $\mathbb{R}^3$  und sein Rand  $\partial S$  heißen regulär, wenn gilt:  $S$  ist stetig differenzierbar parametrisierbar,  $f: B \rightarrow S$  zweimal stetig differenzierbar,  $f_1 \times f_2 \neq 0$  auf  $S$ ,  $\partial S = f(\partial B)$  ist stückweise stetig differenzierbar,  $B$  kompakt,  $\partial B$  stückweise stetig differenzierbar.

Satz: Das Flächenstück  $S$  sei durch die ausgezeichnete Normalenrichtung  $\underline{n}$  orientiert, der Rand  $\partial S$  sei ebenfalls orientiert, so daß  $\underline{n}$  und  $\partial S$  eine Rechtsschraube bilden.  $S, \partial S$  seien regulär, die Parametrisierung  $f$  sei orientierungskohärent (d.h.  $\underline{n}, \partial S$  bilden Rechtsschraube  $\Leftrightarrow B$  liegt links von  $\partial B$ ).  $\underline{v}$  sei ein stetig differenzierbares dreidimensionales Vektorfeld. Dann gilt:  $\int_{\partial S} \underline{v} \cdot d\underline{x} = \int_S \text{rot } \underline{v} \cdot d\underline{u}$ . (Satz von Stokes)  
 Kurzform: Der Fluß von  $\text{rot } \underline{v}$  durch  $S$  ist gleich dem Linienintegral von  $\underline{v}$  längs  $\partial S$ .

P Eine notwendige Bedingung für die Existenz von Orthogonalflächen ist:  $\text{rot } \underline{v} \cdot \underline{v} \equiv 0$ .  
 $[S \text{ ist eine Orthogonalfläche zum Vektorfeld } \underline{v}, \text{ wenn } \underline{v}(\underline{x}) \perp S \text{ für alle } \underline{x} \in S.]$

Def.: Ein Gebiet  $A$  in  $\mathbb{R}^3$  heißt einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve in  $A$  in Flächenstück zerfällt, das ganz in  $A$  liegt.

Bsp.:  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ,  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{positive z-Achse}\}$  sind einfach zusammenhängend in  $\mathbb{R}^3$ ;  $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-Achse}\}, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  sind nicht einfach zusammenhängend in  $\mathbb{R}^3$  bzw.  $\mathbb{R}^2$ .

Satz: Ist  $\text{rot } \underline{v} \equiv 0$  auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet  $A$ , so ist das Vektorfeld  $\underline{v}$  konservativ auf  $A$ .

Def.: Es sei  $S$  ein Flächenstück in  $\mathbb{R}^3$ , gegeben durch eine Parametrisierung  $f: B \rightarrow S$ ,  $B \subseteq \mathbb{R}^2$ . Zu den Funktionen  $F: S \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\underline{v}: S \rightarrow \mathbb{R}^3$  sind dann Integrale wie folgt definiert:  
 (i)  $\int_S F \, d\omega := \int_B F(f(\underline{u})) |f_1(\underline{u}) \times f_2(\underline{u})| \, d\mu_{\underline{u}}$   
 (ii)  $\int_S \underline{v} \cdot d\underline{u} := \int_B \underline{v}(f(\underline{u})) \cdot (f_1(\underline{u}) \times f_2(\underline{u})) \, d\mu_{\underline{u}}$ .

Satz: Für die oben definierten Integrale gilt:  
 (i) Das Integral  $\int_S F \, d\omega$  ist unabhängig von einer speziellen Parametrisierung.  
 (ii) Das Integral  $\int_S \underline{v} \cdot d\underline{u}$  ist unabhängig von speziellen Parametrisierungen, wenn diese durch orientierungserhaltende Transformationen auseinander hervorgehen.  $\gamma$  ist eine orientierungserhaltende Transformation, wenn  $\det(\gamma) > 0$ .

## Der Satz von Gauß:

Def.: Divergenz eines dreidimensionalen Vektorfeldes  $\underline{v}$ :  $\operatorname{div} \underline{v}(\underline{x}) := v_{1,1}(\underline{x}) + v_{1,2}(\underline{x}) + v_{1,3}(\underline{x}) \in \mathbb{R}$ .

Satz von Gauß: Es sei  $K$  ein Körper in  $\mathbb{R}^3$  mit Rand  $\partial K$ ,  $\partial K$  eine geschlossene Fläche, die Normalen  $\underline{n}$  auf  $\partial K$  zeige stets nach außen.  $\underline{v}$  sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt:  
 $\int_{\partial K} \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\omega = \int_K \operatorname{div} \underline{v} \, dV$ . In Worten: Der Fluß von  $\underline{v}$  durch  $\partial K$  ist gleich dem Integral von  $\operatorname{div} \underline{v}$  über  $K$ .

Bsp.:  $\underline{v}(x, y, z) := (x+y, x-y, z^2)$ ,  $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0\}$  (obere Halbkugel).  
 $\operatorname{div} \underline{v}(x, y, z) = 1 - 1 + 2z = 2z \Rightarrow \int_K \operatorname{div} \underline{v} \, dV = \int_K 2z \, dV = 2\pi \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^z z \, dz \, d\varphi \, dr = 2\pi \left( \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^a \int_0^{2\pi} d\varphi \, dr = \frac{\pi}{2} a^4$   
 $\partial K = S_1 \cup S_2$ ,  $S_1$ : Kugelhaube,  $S_2$ : Kreisscheibe  $\Rightarrow \underline{n}_1 = \frac{1}{a}(x, y, z)$ ,  $\underline{n}_2 = (0, 0, -1)$   
 $\Rightarrow \int_{S_2} \underline{v} \cdot \underline{n}_2 \, d\omega = \int_{S_2} (-z^2) \, d\omega = 0$  (da  $z=0$  auf  $S_2$ ),  $\int_{S_1} \underline{v} \cdot \underline{n}_1 \, d\omega = \frac{1}{a} \int_{S_1} (x^2 + 2xy - y^2 + z^3) \, d\omega$   
 Aus Symmetriegründen gilt:  $\int_{S_1} x^2 \, d\omega = \int_{S_1} y^2 \, d\omega$ ,  $\int_{S_1} xy \, d\omega = 0 \Rightarrow \int_{S_1} \underline{v} \cdot \underline{n}_1 \, d\omega = \frac{2}{a} \int_{S_1} z^3 \, d\omega$   
 In Kugelkoordinaten:  $\int_{S_1} \underline{v} \cdot \underline{n}_1 \, d\omega = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a (a^3 \sin^3 \vartheta \cdot a^2 \cos \vartheta) \, da \, d\vartheta \, d\varphi = a^4 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$   
 $= a^4 2\pi \left( -\frac{\cos^2 \vartheta}{2} \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2} a^4$  in Übereinstimmung mit dem Satz von Gauß.

P Für jedes genügend oft differenzierbare Vektorfeld  $\underline{v}$  gilt:  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \underline{v} = 0$ .

## Differentialgleichungen

Def.: Eine Gleichung der Form  $y' = F(x, y)$ ,  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , heißt gewöhnliche Differentialgleichung (Dgl.) erster Ordnung. Eine differenzierbare Funktion  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\varphi'(x) = F(x, \varphi(x))$  für alle  $x \in D(\varphi)$  heißt Lösung der Dgl.  $y' = F(x, y)$ .

### Einige Typen von Differentialgleichungen:

- ①  $y' = f(x)$ : Lösungsfunktion durch den Punkt  $(x_0, y_0)$ :  $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) \, dt$ .
- ②  $y' = g(y)$ : Implizite Darstellung der Lösung  $y = \varphi(x)$  durch  $(x_0, y_0)$ :  $x = x_0 + \int_{y_0}^y \frac{1}{g(t)} \, dt$ .  
 Bsp.:  $y' = y \Rightarrow x = x_0 + \int_{y_0}^y \frac{dt}{t} = x_0 + \log y - \log y_0 = x_0 + \log \frac{y}{y_0} \Rightarrow y = y_0 \cdot e^{x-x_0}$
- ③  $y' = f(x) \cdot g(y)$  (separierbare Dgl.): Implizite Darstellung der Lösung durch  $(x_0, y_0)$ :  $\int_{y_0}^y \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^x f(x) \, dx$ .  
 Bsp.:  $y' = \frac{y}{x}$  ( $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(y) = y$ )  $\Rightarrow \int_{y_0}^y \frac{dy}{y} = \int_{x_0}^x \frac{dx}{x} \Rightarrow \log \frac{y}{y_0} = \log \frac{x}{x_0} \Rightarrow \frac{y}{y_0} = \frac{x}{x_0}$
- ④  $y' = f(x+y)$ : Die Substitution  $u := x+y$  führt auf eine Dgl. vom Typ ②.  
 $u' = 1+y' \Rightarrow$  Dgl.:  $u' = 1+f(u)$  ( $= g(u)$ )  
 $\Rightarrow$  Implizite Darstellung der Lösung  $y (= y(x))$  durch  $(x_0, y_0)$ :  $x = x_0 + \int_{y_0+y_0}^{x+y_0} \frac{du}{1+f(u)}$
- ⑤  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ : (Substitution  $u := \frac{y}{x}$ ) Implizite Darstellung der Lösung  $y$  durch  $(x_0, y_0)$ :  $\int_{y_0/x_0}^{y/x} \frac{du}{f(u)-u} = \log \left| \frac{x}{x_0} \right|$

### Differentialgleichungen - Kurvenscharen:

Zu jeder Dgl.  $y' = F(x, y)$  gehört eine Kurvenschar  $\Phi(x, y, C) = 0$ , die Schar ihrer Lösungskurven.  $C$  heißt Schorparameter und ist für jede einzelne Lösungskurve konstant.

Bestimmung der Dgl. einer Kurvenschar  $\Phi(x, y, C) = 0$ : Aus den zwei Gleichungen  $\Phi(x, y, C) = 0$  und  $\Phi_x(x, y, C) + \Phi_y(x, y, C) \cdot y' = 0$   $C$  eliminieren und nach  $y'$  auflösen.  
 Ist die Kurvenschar explizit durch die Gleichung  $y = \varphi(x, C)$  gegeben, so können die Gleichungen  $y = \varphi(x, C)$  und  $y' = \varphi_x(x, C)$  nach dem Eliminieren von  $C$  nach  $y'$  aufgelöst werden.

Bsp.: Scherengleichung:  $y = C \cdot x \Rightarrow y' = C \Rightarrow y = y'x \Rightarrow$  Dgl. der Scher:  $y' = \frac{y}{x}$

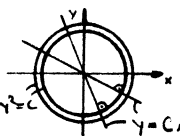
Def.: Die Schar, deren Kurven in jedem Punkt normal auf der entsprechenden Kurve der Scher  $\Phi$  stehen, heißt Orthogonalschar zur Kurvenschar  $\Phi$ .

Verfahren zur Bestimmung der Orthogonalschar zu einer Kurvenschar:

- (1) Nach dem obenstehenden Verfahren die Dgl.  $y' = F(x, y)$  der Kurvenschar bestimmen.
- (2) Dgl. der Orthogonalschar:  $y' = -\frac{1}{F(x, y)}$ .
- (3) Die Orthogonalschar ist die Schar der Lösungskurven der Dgl.  $y' = -\frac{1}{F(x, y)}$ .

Bsp.: Scherengleichung:  $y = C \cdot x \Rightarrow$  Dgl. der Scher:  $y' = \frac{y}{x}$  (s. Bsp. oben)  
 $\Rightarrow$  Dgl. der Orthogonalschar:  $y' = -\frac{x}{y}$  (separierbare Dgl.)  $\Rightarrow \int y \, dy = \int -x \, dx$   
 $\Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \Rightarrow x^2 + y^2 = C$ : Gleichung der Orthogonalschar.

Bsp.: Scher: Kreise, die die  $x$ -Achse in  $O$  berühren:  $x^2 + (y-R)^2 = R^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - Cy = 0$   
 $\Rightarrow 2x + (2y-C)y' = 0$ . Aus den zwei Gleichungen folgt:  $C = \frac{x^2+y^2}{y}$ ,  $y' = \frac{-2xy}{x^2+y^2} \Rightarrow y' = -\frac{2xy}{x^2+y^2}$   
 $\Rightarrow$  Dgl. der Orthogonalschar:  $y' = \frac{x^2+y^2}{2xy} = \frac{(y/x)^2+1}{2(y/x)}$  (Typ ⑤)  $\Rightarrow$  Gleichung der Orthogonalschar:  $x^2 + y^2 - 2x = 0$



## 46 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen:

**Lokaler Satz:** Es sei  $A$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^2$  (d.h. eine offene und zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$ ).  $F: A \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion,  $F_y$  sei stetig auf  $A$ ,  $(x_0, y_0) \in A$ . Dann existiert eine Umgebung  $U$  von  $(x_0, y_0)$ , sodaß die Dgl.  $y' = F(x, y)$  innerhalb von  $U$  genau eine Lösung durch den Punkt  $(x_0, y_0)$  besitzt — oder: dann existiert  $a > 0$ , sodaß die Dgl.  $y' = F(x, y)$  auf dem Intervall  $[x_0 - a, x_0 + a]$  genau eine Lösung  $\varphi$  mit  $\varphi(x_0) = y_0$  besitzt.

**Globaler Existenzsatz:** Es sei  $A$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^2$ ,  $F: A \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion,  $F_y$  stetig auf  $A$ ,  $(x_0, y_0) \in A$ . Dann besitzt die Dgl.  $y' = F(x, y)$  eine Lösungskurve durch  $(x_0, y_0)$ , die sich bis zum Rand von  $A$  erstreckt.

## Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung:

**Def.:** Es seien  $p$  und  $q$  zwei reelle Funktionen. Dann heißt die Dgl.  $y' = p(x)y + q(x)$  (I) inhomogene lineare Dgl. erster Ordnung. Die Dgl.  $y' = p(x)y$  (H) heißt homogene lineare Dgl. erster Ordnung; sie ist die zu (I) gehörige homogene Dgl.

**Satz:** Sind die Funktionen  $p$  und  $q$  stetig auf dem Intervall  $[a, b]$ , so besitzt die Dgl.  $y' = p(x)y + q(x)$  durch jeden Punkt  $(x_0, y_0)$  mit  $x_0 \in [a, b]$  genau eine Lösung.

**Satz:** Die Dgl. (H) besitzt durch den Punkt  $(x_0, y_0)$  die Lösung  $\varphi(x) = y_0 \cdot e^{\int_{x_0}^x p(x) dx}$ .

**Satz:** Die Gesamtheit der Lösungen von (H) bildet einen eindimensionalen Vektorraum über  $\mathbb{R}$ .

**Def.:** Die allgemeine Lösung einer Dgl. ist eine Funktion  $\varphi(x, C)$ , sodaß durch entsprechende Wahl von  $C$  jede Lösung der Dgl. dargestellt wird (Dgl. erster Ordnung).

**Satz:** Die allgemeine Lösung von (H) ist:  $\varphi(x, C) = C \cdot e^{\int p(x) dx}$ .

**Satz:** (i) Die Differenz zweier Lösungen von (I) ist eine Lösung von (H).  
(ii) Die Summe einer Lösung von (H) und einer Lösung von (I) ist eine Lösung von (I).

**Satz:** Die Summe einer beliebigen Lösung von (I) und der allg. Lösung von (H) ist die allgemeine Lösung von (I). Die allg. Lösung von (I) ist:  $y = e^{\int p(x) dx} [C + \int q(x) e^{-\int p(x) dx} dx]$ ,  $\int p(x) dx = \int p(x) dx$ .

**Bsp.:**  $y' = y + 1$  ( $p(x) = q(x) \equiv 1$ )  $\Rightarrow$  Allg. Lösung:  $y(x) = e^x (C + (-e^{-x})) = C e^x - 1$   
Lösung durch den Punkt  $(-1, 1)$ :  $y(-1) = C e^{-1} - 1 \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow C = 8e \Rightarrow y(x) = 8e^{x+1} - 1$

**Lineare homogene Differentialgleichungssysteme:**  $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$  Die  $x_i$  sind Funktionen:  $x_i: t \mapsto x_i(t)$ ,  $i=1, \dots, n$   
 $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$ ,  $i=1, \dots, n$

**Matrisschreibweise:**  $x := (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\dot{x} := (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ ,  $A := [a_{ik}] \Rightarrow \dot{x} = Ax$

**Lösungsmethode:** Wir führen eine lineare Transformation durch:  $u := Sx$ ,  $S$  eine reguläre  $n \times n$  Matrix.  
 $\Rightarrow \dot{u} = S\dot{x} \Rightarrow \dot{u} = SAx = SAS^{-1}u$ . Wir wählen  $S$  so, daß die Matrix  $SAS^{-1}$  möglichst einfach wird, d.h. Diagonalform oder Jordansche Normalform erhält. Dann können die Lösungen  $u$  einfach — durch Lösen von linearen Dgl. — bestimmt werden.  $x = S^{-1}u$ .

**Bsp.:**  $\begin{cases} \dot{x}_1 = 7x_1 + 5x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  Wir wählen  $A$  diagonalisierbar; denn berechnen wir die Eigenwerte:  
det  $(A - \lambda I) = (7-\lambda)(3-\lambda) - 5 = (\lambda-8)(\lambda-2) \Rightarrow$  Eigenwerte:  $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = 2$   
Eigenvektoren:  $(5, 1)$  ist Eigenvektor zu  $\lambda_1 = 8$ ,  $(1, -1)$  ist Eigenvektor zu  $\lambda_2 = 2$ .  $\{(5, 1), (1, -1)\}$  sei die neue Basis (alte Basis:  $\{(1, 0), (0, 1)\}$ ). Dann gilt (vgl. lineare Algebra):  
 $S^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $SAS^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{u}_1 = 8u_1 \Rightarrow u_1 = C_1 e^{8t}$ ,  $x_1 = 5u_1 + u_2$   
 $\Rightarrow \dot{u}_2 = 2u_2 \Rightarrow u_2 = C_2 e^{2t}$ ,  $x_2 = u_1 - u_2$   
 $\Rightarrow x_1(t) = 5C_1 e^{8t} + C_2 e^{2t}$ ,  $x_2(t) = C_1 e^{8t} - C_2 e^{2t}$  (allgemeine Lösung des Systems)

## Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung:

**Def.:** Eine Gleichung der Form  $y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ ,  $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ , heißt gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung. Eine Funktion  $\varphi$  ist Lösung dieser Dgl., wenn für alle  $x$  gilt:  $\varphi^{(n)}(x) = F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x))$ .

**Bsp.:**  $y'' = y' + x$ :  $u := y' \Rightarrow u' = u + x \Rightarrow u(x) = C e^x - (x+1) \Rightarrow y(x) = \int u(x) dx = C e^x - \frac{(x+1)^2}{2} + D$

**Satz (Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen):** Es sei  $A$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $F: A \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion; die Funktionen  $F, F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$  seien stetig auf ganz  $A$ . Dann existiert eine eindimensionale Umgebung  $I$  (d.h. ein Intervall  $[x_0 - a, x_0 + a]$ ,  $a > 0$ ), sodaß die Dgl.  $y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  genau eine Lösungsfunktion  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt mit  $\varphi(x_0) = a_0$ ,  $\varphi'(x_0) = a_1, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$ , wobei  $(x_0, a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$  ein beliebig gewählter Punkt aus  $A$  ist.

Die allgemeine Lösung einer Dgl.  $n$ -ter Ordnung bildet ein  $n$ -parametriges Kurvenschar.

Bestimmung der Dgl. einer  $n$ -parametrischen Kurvenschar: Sehorgleichung  $n$ -mal nach  $x$  ableiten, aus den insgesamt  $n+1$  Gleichungen die Parameter eliminieren, nach  $y^{(n)}$  auflösen.

Bsp.: Schar aller Kreise in der Ebene:  $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = C_3^2$  (3 Parameter). Ableiten nach  $x$ :  
 $\Rightarrow 2(x - C_1) + 2(y - C_2)y' = 0$ ,  $1 + y'^2 + (y - C_2)y'' = 0$ ,  $2y'y'' + y'y''' + (y - C_2)y'''' = 0$   
 $\Rightarrow y - C_2 = -\frac{1+y'^2}{y''} = -\frac{3y'y''}{y'''} \Rightarrow \text{Dgl.: } y''' = \frac{3y'y''^2}{1+y'^2}$

### Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung:

Def.: Inhomogene Dgl. der Ordnung  $n$ :  $y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + p_0y = q$  (I),  
 zugehörige homogene Dgl.:  $y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + p_0y = 0$  (H).  
 $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind Funktionen von  $x$ .

Satz: Die Funktionen  $p_0, \dots, p_{n-1}, q$  seien stetig auf dem Intervall  $[a, b]$ . Dann gibt es für jeden Punkt  $(x_0, a_0, \dots, a_{n-1}) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$  genau eine Lösung  $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y(x_0) = a_0$ ,  $y'(x_0) = a_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$ .

Satz: Die Summe einer beliebigen Lösung von (I) und der allgemeinen Lösung von (H) ist die allgemeine Lösung von (I).

Satz: Die Gesamtheit der Lösungen von (H) bildet einen  $n$ -dimensionalen Vektorraum über  $\mathbb{R}$ .

### Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

Def.: Homogene Dgl. mit konstanten Koeffizienten:  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$  (HC)

Def.: Charakteristisches Polynom der Dgl. (HC):  $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$  (X)

Lösungen von (HC):

- (i) Ist  $\lambda$  einfache Nullstelle von (X), so ist  $y: x \mapsto e^{\lambda x}$  eine Lösung von (HC).
- (ii) Ist  $\lambda$   $m$ -fache Nullstelle von (X), so sind die Funktionen  $y_1: x \mapsto e^{\lambda x}$ ,  $y_2: x \mapsto x e^{\lambda x}$ ,  $\dots$ ,  $y_m: x \mapsto x^{m-1} e^{\lambda x}$  linear unabhängige Lösungen von (HC) (falls  $\lambda$  komplex analog).
- (iii) Ist  $\lambda = a + ib$  Nullstelle von (X), so sind die Funktionen  $y_1: x \mapsto e^{ax} \cos bx$  und  $y_2: x \mapsto e^{ax} \sin bx$  Lösungen von (HC) (Die Lösungen  $y_1, y_2$  entsprechen dem Nullstellenpaar  $\lambda, \bar{\lambda}$ ).

Die Lösungen zu verschiedenen Nullstellen von (X) sind linear unabhängig. Es gibt  $n$  lin. unabhängige Lösungen.

Bsp.:  $y''' + 2y'' + 5y' = 0$ : (X):  $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 5) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = -1 \pm 2i$   
 $\Rightarrow$  Allgemeine Lösung der Dgl.:  $y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} \cos 2x + C_3 e^{-x} \sin 2x$

Bsp.:  $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y''' - y'' = 0$ : (X):  $\lambda^5 - 3\lambda^4 + 3\lambda^3 - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda - 1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$   
 (doppelte bzw. einfache Nullstelle)  $\Rightarrow$  Allg. Lösung:  $y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 x e^x + C_5 x^2 e^x$

### Inhomogene lineare Differentialgleichungen:

Methode der "Variation der Konstanten": Ist  $y = C e^{2(x)}$  die allgemeine Lösung einer homogenen linearen Dgl. erster Ordnung, so kann mit dem Lösungsansatz  $y = \gamma(x) e^{2(x)}$ ,  $\gamma$  eine Funktion, eine Lösung der inhomogenen Dgl. gefunden werden. Das Verfahren läßt sich auch bei höheren Ordnungen verwenden.

(I)  $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x)$ , (H)  $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ .

$\Rightarrow$  Allgemeine Lösung von (H):  $y(x) = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x)$ ,  $\varphi_1, \varphi_2$  zwei lin. unabh. Lösungen von (H).  
 $\Rightarrow$  Eine Lösung von (I) ist:  $y(x) = \gamma_1(x) \varphi_1(x) + \gamma_2(x) \varphi_2(x)$ , wobei:  $\gamma_1' = \frac{-q \varphi_2}{\varphi_1 \varphi_2' - \varphi_1' \varphi_2}$ ,  $\gamma_2' = \frac{q \varphi_1}{\varphi_1 \varphi_2' - \varphi_1' \varphi_2}$ .

Differenzenverfahren:  $\Delta_{n,0} := a_n$ ,  $\Delta_{n,k+1} := \Delta_{n+1,k} - \Delta_{n,k}$ :  $a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \Delta_{0,k}$

Wurzeln komplexer Zahlen (Satz von Moivre):  $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \text{cis} \left( \frac{\varphi}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right)$ ,  $k = 0, \dots, n-1$

Ungleichungen:

Bernoulli'sche Ungleichung:  $(1+x)^n \geq 1+nx$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > -1$ ,  $n \in \mathbb{N}$

Ungleichung von Cauchy - Schwarz - Bunjakowski:  $\left| \sum_{k=1}^n a_k \bar{b}_k \right|^2 \leq \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \cdot \sum_{k=1}^n |b_k|^2$

Gleichheit gilt genau dann, wenn die beiden  $n$ -Tupel  $(a_1, \dots, a_n)$ ,  $(b_1, \dots, b_n)$  linear abhängig sind.

Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel:  $\sum_{k=1}^n p_k x_k \geq \prod_{k=1}^n x_k^{p_k}$

$x_1, \dots, x_n > 0$ ;  $(p_1, \dots, p_n)$  ein Gewichtsatz, d.h.  $\sum_{k=1}^n p_k = 1$ ,  $p_k \geq 0 \forall k$   
Spezialfall  $p_k = \frac{1}{n} \forall k$ :  $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$

Def.:  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ .  $p$ -Norm von  $\underline{x}$ :  $\|\underline{x}\|_p := \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ ,  $p \geq 1$

Minkowski'sche Ungleichung:  $\|\underline{x} + \underline{y}\|_p \leq \|\underline{x}\|_p + \|\underline{y}\|_p$

Hölder'sche Ungleichung:  $\sum_{k=1}^n |x_k \bar{y}_k| \leq \|\underline{x}\|_p \cdot \|\underline{y}\|_q$ ,  $p, q > 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Folgen:

$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ ,  $q \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ,  $|q| < 1$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r \cdot q^n = 0$ ,  $q \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ,  $|q| < 1$ ,  $r \in \mathbb{N}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ,  $a > 0$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$  (Wallis-Produkt)

Reihen:

Geometrische Reihe:  $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ ,  $z \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ,  $|z| < 1$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \log 2$ ;  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ;  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\varphi}{k} = -\log \left(2 \sin \frac{\varphi}{2}\right)$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\varphi}{k} = \frac{\pi - \varphi}{2}$

Grenzwerte:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k e^x = 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^k \log x = 0$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k > 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Reihenentwicklungen:

$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$ ;  $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ;  $\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ ,  $-1 < x \leq 1$

Binomialreihe:  $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ ,  $x \in ]-1, +1[$ ,  $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$

$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots$ ;  $\operatorname{arctan} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ,  $|x| \leq 1$

Abschätzung der Fakultät:  $\frac{n^n}{e^n} \cdot e < n! < \frac{n^n}{e^n} \cdot e \cdot \sqrt{n}$

Stirling'sche Formel:  $n! \approx \frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n}$

Binomischer Lehrsatz:  $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

Endliche geometrische Reihe:  $\sum_{k=0}^n a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ,  $q \neq 1$

Matrixinversion:  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

| $x$      | 0 | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
|----------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |
| $\tan x$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | -               |
| $\cot x$ | - | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0               |

Def.: Sei  $\{a_n\}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ . Dann heißt  $\limsup a_n \equiv \overline{\lim} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} [\sup \{a_n, a_{n+1}, \dots\}]$  Limes Superior der Folge  $\{a_n\}$ ,  $\liminf a_n \equiv \underline{\lim} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} [\inf \{a_n, a_{n+1}, \dots\}]$  Limes Inferior der Folge  $\{a_n\}$ .

Der Limes Superior (Inferior) existiert immer, wenn wir auch die Werte  $\pm \infty$  zulassen, und hat die anschauliche Bedeutung des Supremums (Infimums) der Menge der Häufungspunkte der Folge  $\{a_n\}$ . Ist die Folge  $\{a_n\}$  konvergent, so gilt  $\limsup a_n = \liminf a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

Def.: Sei  $\{a_n\}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ . Dann heißt  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$  Potenzreihe um  $a$  ( $a, z \in \mathbb{C}$ ).

Satz: Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$  eine Potenzreihe und  $R$  - der Konvergenzradius der Potenzreihe - definiert durch  $\frac{1}{R} := \limsup |a_n|^{1/n}$ . Dann gilt:

- (a) Für  $|z-a| < R$  konvergiert die Reihe absolut.
- (b) Für  $|z-a| > R$  divergiert die Reihe.
- (c) Für  $0 < r < R$  konvergiert die Reihe gleichmäßig auf  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$ .

Bsp.: Konvergenzradius der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{j^2}}{j!}$ ? -  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{j^2}}{j!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{j^2}$  mit  $a_n = \frac{1}{j!}$  für  $k = j^2$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , und  $a_n = 0$  sonst. Konvergenzradius:  $\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{1/n} = \limsup \frac{1}{j!^{1/j^2}} = \limsup \frac{1}{j^{1/j}} = 1$  (da  $1 \leq j^{1/j} \leq j$  und somit  $1 \leq \frac{1}{j^{1/j}} \leq \frac{1}{j}$  für  $j \rightarrow \infty$ ). Also:  $R = 1$ .

P: Sei  $\sum a_n (z-a)^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R$ . Dann gilt  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ , falls dieses Limes existiert.

### Elementare Eigenschaften analytischer Funktionen

Def.:  $B(a, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R\}$ ,  $\overline{B}(a, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leq R\}$ . Eine offene und zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{C}$  heißt Gebiet.

Def.: Sei  $G$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion.  $f$  heißt differenzierbar an der Stelle  $a \in G$ , falls der Limes  $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} =: f'(a)$  - die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $a$  - existiert. Ist die Funktion  $f'$  stetig, so heißt  $f$  stetig differenzierbar usw.

Satz: Sei  $G$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$ . Ist die Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbar an der Stelle  $a \in G$ , so ist  $f$  stetig an der Stelle  $a$ .

Die üblichen Ableitungsregeln (Produktregel, Kettenregel usw.) gelten auch im komplexen Fall.

Satz: (Ableitung der "Umkehrfunktion") Seien  $G$  und  $\Omega$  offene Teilmengen von  $\mathbb{C}$ ,  $f: G \rightarrow \Omega$  und  $g: \Omega \rightarrow G$  stetige Funktionen mit  $f(G) \subset \Omega$  und  $g(f(z)) = z$  für alle  $z \in G$ . Ist  $g$  differenzierbar und  $g'(z) \neq 0$ , so ist  $f$  differenzierbar und es gilt  $f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))}$ .

Def.: Sei  $G$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$ . Eine auf  $G$  stetig differenzierbare Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  heißt analytisch oder holomorph.

Bemerkung: Eine differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{C}$  ist immer stetig differenzierbar und damit analytisch ( $\rightarrow$  Satz von Goursat, s.u.).

P:  $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$  besitze den Konvergenzradius  $R > 0$ . Dann gilt:

- (a) Für jedes  $k \geq 1$  besitzt die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n (z-a)^{n-k}$  den Konvergenzradius  $R$ .
- (b) Die Funktion  $f$  ist unendlich oft differenzierbar und damit analytisch auf  $B(a, R)$ ;  $f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n (z-a)^{n-k}$  für alle  $k \geq 1$  und  $z \in B(a, R)$ .
- (c)  $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$  für alle  $n \geq 0$ .

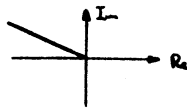
Satz: Sei  $G$  ein Gebiet,  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion,  $u: G \rightarrow \mathbb{R}$  dem Realteil und  $v: G \rightarrow \mathbb{R}$  dem Imaginärteil.  $f$  ist genau dann eine analytische Funktion, wenn  $u$  und  $v$ , aufgefaßt als Funktionen von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}$  ( $z = (x, y)$ ), die Cauchy-Riemann-Gleichungen:  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  erfüllen.

Alternativ Formulierung des Satzes: Sei  $G$  ein Gebiet,  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion,  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ . Dann ist  $f$  genau dann eine analytische Funktion, wenn  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$  in  $G$  ist. Ist  $f$  analytisch, so gilt:  $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$ .

Satz: Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion sind harmonische Funktionen.

## Der Logarithmus:

Die Lösungsmenge der Gleichung  $e^z = w$  für  $w \neq 0$  ist  $\{z = \log|w| + i(\arg w + 2\pi k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , d.h.  $\exp$  besitzt keine eindeutige Umkehrfunktion in  $\mathbb{C}$ . Noch schlimmer: wir können auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  überhaupt keine Funktion  $L$  definieren, die stetig ist und für die gilt:  $\exp(L(z)) = z$  für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Wir können dies nur in der "aufgeschnittenen Ebene"  $\mathbb{C} \setminus \{\text{eine Halbgerade}\}$  (s. Fig.) tun.



Def.: Sei  $G$  ein Gebiet und  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion mit  $z = \exp(f(z))$  für alle  $z \in G$ . Dann heißt  $f$  Ant des Logarithmus.

Def.:  $f: \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(re^{i\varphi}) := \log r + i\varphi$ , wo  $\varphi \in ]-\pi, +\pi[$ , heißt Hauptwert des Logarithmus.

Satz: Ein Ant des Logarithmus ist analytisch und seine Ableitung ist  $z^{-1}$ .

## Komplexe Integration

Def.: Ein Weg  $\gamma: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist relativifizierbar bzw. von beschränkter Variation, wenn  $\pi > 0$  existiert, so daß für jede Teilung  $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$  von  $[a, b]$  gilt:  $v(\gamma; P) := \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \leq \pi$ .  $V(\gamma) := \sup\{v(\gamma; P) \mid P \text{ ist eine Teilung von } [a, b]\}$  heißt totale Variation des Weges  $\gamma$ .

Die totale Variation hat die anschauliche Bedeutung der Länge des Weges und ist für relativifizierbare Wege beschränkt. In allen praktischen Anwendungen sind die betrachteten Wege stückweise glatt, d.h. stetig differenzierbar. Dann gilt:

P Ist der Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stückweise glatt, dann ist  $\gamma$  relativifizierbar und es gilt:  $V(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ .

Satz: Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein relativifizierbarer Weg,  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion. Dann existiert  $I \in \mathbb{C}$ , so daß für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so daß, wenn  $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$  mit  $\|P\| := \max\{t_k - t_{k-1} \mid k = 1, 2, \dots, n\} < \delta$  eine Teilung ist, gilt:  $|I - \sum_{k=1}^n f(\tau_k)(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}))| < \varepsilon$  für beliebige Wahl des Punktes  $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ ,  $k = 1, \dots, n$ .  $I$  heißt Integral von  $f$  bezüglich des Weges  $\gamma$  und wird bezeichnet mit  $I = \int f d\gamma = \int_a^b f(t) d\gamma(t)$ .

Def.: Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein relativifizierbarer Weg und  $f: \{\gamma\} := \{\gamma(t) \mid t \in [a, b]\} \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion. Dann heißt  $\int_\gamma f \equiv \int_\gamma f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) d\gamma(t)$  Linienintegral von  $f$  längs  $\gamma$ .

P Ist  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein glatter oder stückweise glatter Weg,  $f: \{\gamma\} \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion, dann ist  $\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$ .

P (Invarianz unter richtungserhaltenden Parametertransformationen). Ist  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein relativifizierbarer Weg und  $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$  eine stetige, monoton wachsende Funktion mit  $\varphi(c) = a$  und  $\varphi(d) = b$ , dann gilt für jede stetige Funktion  $f$  auf  $\{\gamma\}$ :  $\int_\gamma f = \int_{\gamma \circ \varphi} f$ .

Def.: Seien  $\sigma: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  relativifizierbare Wege. Der Weg  $\sigma$  heißt äquivalent zum Weg  $\gamma$ , wenn eine Funktion  $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$  existiert, die stetig und monoton wachsend mit  $\varphi(c) = a$ ,  $\varphi(d) = b$  ist, so daß  $\sigma = \gamma \circ \varphi$ .  $\varphi$  heißt Parametertransformation. Eine Kurve ist eine Äquivalenzklasse von Wegen. Das Linienintegral über eine Kurve ist das Linienintegral über einen Weg aus dieser Äquivalenzklasse usw.

Def.: Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine relativifizierbare Kurve.  $-\gamma(t) := \gamma(-t)$ ,  $t \in [-b, -a]$ .  $(\gamma+c)(t) := \gamma(t) + c$ ,  $t \in [a, b]$ ,  $c \in \mathbb{C}$ . (Eine Summe von Wegen könnte auch definiert werden.)

P Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine relativifizierbare Kurve und  $f$  eine stetige Funktion auf  $\{\gamma\}$ . Dann gilt:  
(a)  $\int_{-\gamma} f = - \int_\gamma f$   
(b) Ist  $\gamma$  zusätzlich stückweise glatt, so gilt  $|\int_\gamma f| \leq \int_\gamma |f| |dz| = \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq V(\gamma) \cdot \sup\{|f(z)| \mid z \in \{\gamma\}\}$ .  
(c)  $\int_{\gamma+c} f(z) dz = \int_\gamma f(z+c) dz$

Satz: Sei  $G$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und  $\gamma$  ein relativifizierbarer Weg in  $G$  mit  $\alpha$  als Anfangs- und  $\beta$  als Endpunkt. Ist  $f$  eine stetige Funktion von  $G$  nach  $\mathbb{C}$ , die in  $G$  eine Stammfunktion besitzt, d.h. es existiert eine Funktion  $F: G \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $F' = f$  auf  $G$ , so gilt:  $\int_\gamma f = F(\beta) - F(\alpha)$ .

Def.: Ein Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  heißt geschlossen, falls  $\gamma(a) = \gamma(b)$  ist.

Korollar (zum vorhergehenden Satz): Genügen  $G, \gamma, f$  den Voraussetzungen des Satzes und ist  $\gamma$  zusätzlich geschlossen, dann gilt:  $\int_{\gamma} f = 0$ .

### Die Darstellung analytischer Funktionen als Potenzreihe:

Im Folgenden bezeichne  $G$  immer eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$ .

P Sei  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch und  $\bar{B}(a, r) \subset G$  ( $r > 0$ ). Ist  $\gamma(t) = a + re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , dann gilt  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$  für  $|z-a| < r$ .

Satz: Sei  $f$  eine analytische Funktion in  $B(a, R)$ . Dann ist  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$  für  $|z-a| < R$ , wobei  $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$ . Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist größer oder gleich  $R$ .

Korollar: Ist  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch und  $a \in G$ , dann ist  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$  für  $|z-a| < R$ , wobei  $R = d(a, \partial G) = \text{Abstand von } a \text{ zum Rand von } G$ .

Korollar: Ist  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch, dann ist  $f$  unendlich oft differenzierbar.

Korollar: Ist  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch und  $\bar{B}(a, r) \subset G$ , dann gilt:  $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$  wo  $\gamma(t) = a + re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

Korollar ("Cauchy's estimate"): Sei  $f$  analytisch in  $B(a, R)$  und  $|f(z)| \leq M$  für alle  $z \in B(a, R)$ . Dann gilt  $|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n! M}{R^n}$ .

P Sei  $f$  analytisch in  $B(a, R)$  und  $\gamma$  eingeschlossener rektifizierbarer Weg in  $B(a, R)$ . Dann ist  $\int_{\gamma} f = 0$ .

### Die Nullstellen einer analytischen Funktion:

Def.: Ist  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch und  $a \in G$  mit  $f(a) = 0$ , dann heißt  $a$  Nullstelle der Vielfachheit  $n \geq 1$ , wenn eine analytische Funktion  $g: G \rightarrow \mathbb{C}$  existiert so, daß  $f(z) = (z-a)^n g(z)$  und  $g(a) \neq 0$ .

Satz: Sei  $G$  ein Gebiet und  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  eine analytische Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a)  $f \equiv 0$

(b) Es gilt ein Punkt  $a \in G$  mit  $f^{(n)}(a) = 0$  für alle  $n \geq 0$ .

(c) Die Menge der Nullstellen von  $f$ ,  $\{z \in G \mid f(z) = 0\}$ , hat einen Häufungspunkt in  $G$ .

Korollar: Sind  $f$  und  $g$  analytische Funktionen in einem Gebiet  $G$ , dann ist  $f \equiv g$  genau dann, wenn die Menge  $\{z \in G \mid f(z) = g(z)\}$  einen Häufungspunkt in  $G$  besitzt.

Anwendung: Seien  $f$  und  $g$  analytische Funktionen in einem Gebiet  $G$ , das ein Stück der reellen Achse enthält. Sind  $f$  und  $g$  auf diesem Stück der reellen Achse identisch gleich, dann folgt sofort, daß  $f$  und  $g$  im ganzen Gebiet  $G$  identisch sind. So können Identitäten aus dem Reellen ohne neue Rechnung ins Komplexe übertragen werden!

Korollar: Ist  $f$  analytisch in einem Gebiet  $G$  und nicht identisch Null, dann existiert zu jedem  $a \in G$  mit  $f(a) = 0$  eine natürliche Zahl  $n \geq 1$  und eine analytische Funktion  $g: G \rightarrow \mathbb{C}$  so, daß  $g(a) \neq 0$  und  $f(z) = (z-a)^n g(z)$  für alle  $z \in G$  — das heißt: alle Nullstellen von  $f$  haben eine endliche Vielfachheit.

### Der Index einer geschlossenen Kurve:

P Ist  $\gamma$  eine geschlossene rektifizierbare Kurve und  $a \notin \{\gamma\}$ , dann ist  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} \in \mathbb{Z}$ .

Def.: Ist  $\gamma$  eine geschlossene rektifizierbare Kurve in  $\mathbb{C}$  und  $a \notin \{\gamma\}$ , dann heißt die ganze Zahl  $n(\gamma; a) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$  Index der Kurve  $\gamma$  bezüglich des Punktes  $a$  oder Umlaufzahl von  $\gamma$  um  $a$ .

Seien  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann sind die Kurven  $-\gamma$  und  $\gamma + \sigma$  wie folgt definiert: ( $\gamma(1) = \sigma(0)$ )

$-\gamma: (-\gamma)(t) = \gamma(1-t)$

$\gamma + \sigma: (\gamma + \sigma)(t) = \gamma(2t)$  für  $t \in [0, \frac{1}{2}]$  und  $(\gamma + \sigma)(t) = \sigma(2t-1)$  für  $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ .

P Sind  $\gamma$  und  $\sigma$  geschlossene rektifizierbare Kurven mit demselben Anfangspunkt. Dann gilt:

(a)  $n(-\gamma; a) = -n(\gamma; a)$  für alle  $a \notin \{\gamma\}$ .

(b)  $n(\gamma + \sigma; a) = n(\gamma; a) + n(\sigma; a)$  für alle  $a \notin \{\gamma\} \cup \{\sigma\}$ .

Eine geodetische relativisierbare Kurve  $\gamma$  hat die Menge  $\mathbb{C} \setminus \{y\}$  in mehrere zusammenhängende Teilmengen auf. Von diesen Teilmengen ist genau eine unbeschränkt. Es gilt der folgende Satz:

**Satz:** Sei  $\gamma$  eine geschlossene relativisierbare Kurve in  $\mathbb{C}$ . Dann ist der Index  $u(\gamma; a)$  für alle Punkte  $a$  aus einer festen zusammenhängenden Teilmenge ("Komponente") von  $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$  konstant. Gehört  $a$  zur unbeschränkten zusammenhängenden Teilmenge von  $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ , dann ist  $u(\gamma; a) = 0$ .

Anschaulich gesehen, gibt der Index an, wie oft ein Beobachter, der sich auf der Kurve  $\gamma$  bewegt, den Punkt  $a$  umläuft; längt der Punkt  $a$  während eines Umlaufes immer zur Linken (Rechts), dann wird dieser Umlauf positiv (negativ) gezählt.



$$u(\gamma; a) = 0 \quad u(\gamma; a) = -1 \quad u(\gamma; a) = 1$$

Der Satz und die Integralformel von Cauchy:

**P:** Sei  $\gamma$  eine relativisierbare Kurve und  $g$  eine stetige Funktion auf  $\{\gamma\}$ . Für jedes ganze  $n \geq 1$  sei  $F_n(z) := \int_{\gamma} g(w) (w-z)^n dw$  für  $z \notin \{\gamma\}$ . Jedes  $F_n$  ist analytisch auf  $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$  und weiter folgt:  $F_n(z) = n F_{n-1}(z)$ .

**Cauchy's Integralformel (1. Version):** Sei  $G$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  eine analytische Funktion. Ist  $\gamma$  eine geschlossene relativisierbare Kurve in  $G$  mit  $u(\gamma; w) = 0$  für alle  $w \in \mathbb{C} \setminus G$ , dann gilt für  $a \in G \setminus \{\gamma\}$ :  $u(\gamma; a) f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$ .

**Cauchy's Integralformel (2. Version):** Sei  $G$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  eine analytische Funktion. Sind  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  geschlossene relativisierbare Kurven in  $G$  mit  $u(\gamma_1; w) + \dots + u(\gamma_n; w) = 0$  für alle  $w \in \mathbb{C} \setminus G$ , dann gilt für  $a \in G \setminus \bigcup_{k=1}^n \{\gamma_k\}$ :  $f(a) \cdot \sum_{k=1}^n u(\gamma_k; a) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z-a} dz$ .

**Satz von Cauchy (1. Version):** Sei  $G$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  eine analytische Funktion. Sind  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  geschlossene relativisierbare Kurven in  $G$  mit  $u(\gamma_1; w) + \dots + u(\gamma_n; w) = 0$  für alle  $w \in \mathbb{C} \setminus G$ , dann gilt  $\sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f = 0$ .

**Def.:** Ist  $G$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und  $\gamma$  eine geschlossene relativisierbare Kurve in  $G$ , dann heißt  $\gamma$  homolog zu Null, symbolisch:  $\gamma \approx 0$ , wenn  $u(\gamma; w) = 0$  für alle  $w \in \mathbb{C} \setminus G$ .

**Satz von Cauchy (1. Version, angewandt auf eine einzelne Kurve):** Sei  $G$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$ ,  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  eine analytische Funktion und  $\gamma$  eine Kurve in  $G$  mit  $\gamma \approx 0$ . Dann gilt:  $\int_{\gamma} f = 0$ .

**Satz:** Unter den Voraussetzungen der 2. Version der Integralformel von Cauchy gilt für  $n \geq 1$ :  $f^{(n)}(a) \sum_{k=1}^n u(\gamma_k; a) = n! \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$ .

**Korollar:** Sei  $G$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$ ,  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  eine analytische Funktion und  $\gamma$  eine Kurve in  $G$  mit  $\gamma \approx 0$ . Dann gilt für  $n \geq 1$ :  $f^{(n)}(a) \cdot u(\gamma; a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$ .

**Def.:** Seien  $\gamma_0, \gamma_1: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$  zwei geschlossene relativisierbare Wege in einem Gebiet  $G$ . Dann heißt  $\gamma_0$  homotop zu  $\gamma_1$  in  $G$ , wenn eine stetige Funktion  $\Gamma: [0,1] \times [0,1] \rightarrow G$  existiert, sodass  $\Gamma(s,0) = \gamma_0(s)$ ,  $\Gamma(s,1) = \gamma_1(s)$  und  $\Gamma(1,t) = \Gamma(0,t)$ ,  $s,t \in [0,1]$ , gilt. Symbolisch:  $\gamma_0 \sim \gamma_1$ .

**Def.:** Sei  $\gamma$  eine geschlossene relativisierbare Kurve in einem Gebiet  $G$ . Dann heißt  $\gamma$  homotop zu 0,  $\gamma \approx 0$ , wenn  $\gamma$  homotop zu einer konstanten Kurve, d.h. zu einem Punkt, ist.

**Anschaulich:** Zwei Kurven sind homotop, wenn sie stetig ineinander verformt werden können; eine Kurve ist homotop zu 0, wenn sie stetig auf einen Punkt zusammenziehbar ist.

**Satz von Cauchy (2. Version):** Sei  $G$  ein Gebiet,  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  eine analytische Funktion und  $\gamma$  eine Kurve in  $G$  mit  $\gamma \approx 0$ . Dann ist  $\int_{\gamma} f = 0$ .

**Satz von Cauchy (3. Version):** Seien  $\gamma_0, \gamma_1$  zwei Kurven in einer offenen Teilmenge  $G$  von  $\mathbb{C}$ . Dann gilt  $\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$  für jede auf  $G$  analytische Funktion  $f$ , wenn  $\gamma_0 \sim \gamma_1$  ist.

**Def.:** Eine offene Teilmenge  $G$  von  $\mathbb{C}$  ist einfach zusammenhängend, wenn  $G$  zusammenhängend und jede geschlossene Kurve in  $G$  homotop zu 0 ist.

**Satz von Cauchy (4. Version):** Ist  $G$  eine einfach zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{C}$ , dann gilt  $\int_{\gamma} f = 0$  für jede geschlossene relativisierbare Kurve  $\gamma$  in  $G$  und jede analytische Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ .

Korollar: Ist  $G$  eine einfach zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch, dann besitzt  $f$  eine Stammfunktion auf  $G$ .

Satz: Ist  $\gamma$  eine geschlossene relativisierbare Kurve in einer Teilmenge  $G$  von  $\mathbb{C}$  mit  $\gamma \sim 0$  in  $G$ , dann folgt  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  für alle  $f \in \mathcal{H}(G)$ . (Die Umkehrung gilt nicht notwendigerweise!)

Def.: Seien  $\gamma_0, \gamma_1: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$  zwei relativisierbare Wege in einer offenen Teilmenge  $G$  von  $\mathbb{C}$  mit  $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a$  und  $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b$ .  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  heißen FEP-homotop ("fixed-end-point-homotopy"), wenn eine stetige Funktion  $\Gamma: [0,1] \times [0,1] \rightarrow G$  mit  $\Gamma(s,0) = \gamma_0(s)$ ,  $\Gamma(s,1) = \gamma_1(s)$ ,  $\Gamma(0,t) = a$ ,  $\Gamma(1,t) = b$ ,  $s,t \in [0,1]$ , existiert.

D.h., zwei Kurven mit gleichen Anfangs- und Endpunkt sind FEP-homotop, wenn sie unter Festhalten des Anfangs- und Endpunktes stetig ineinander verformt werden können.

Satz (Unabhängigkeit vom Integrationsweg): Seien  $\gamma_0, \gamma_1$  zwei relativisierbare FEP-homotope Kurven in einer offenen Teilmenge  $G$  von  $\mathbb{C}$ . Dann gilt:  $\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$  für jede in  $G$  analytische Funktion.

Satz von Morera: Sei  $G$  ein Gebiet und  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion mit  $\int_{\gamma} f = 0$  für jeden dreieckigen Weg  $\gamma$  in  $G$ . Dann ist  $f$  analytisch in  $G$ .

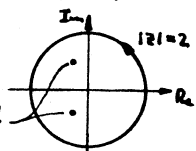
Satz von Cauchy: Sei  $G$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbar. Dann ist  $f$  analytisch auf  $G$ .

### Das Zählen von Nullstellen:

Satz: Sei  $G$  ein Gebiet,  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  eine analytische Funktion mit den Nullstellen  $a_1, \dots, a_n$  (entsprechend ihrer Vielfachheit zähl. mehrfach aufgeführt). Ist  $\gamma$  eine geschlossene relativisierbare Kurve in  $G$ , die durch keine der Punkte  $a_k$ ,  $k=1, \dots, n$ , geht, mit  $\gamma \sim 0$ , dann gilt:  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^n \nu(\gamma; a_k)$ .

Korollar: Seien  $G, f, \gamma$  vorausgesetzt wie im Satz mit dem Unterschied, daß  $a_1, \dots, a_n$  die Lösungen der Gleichung  $f(z) = \alpha$  in  $G$  sein. Dann gilt:  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - \alpha} dz = \sum_{k=1}^n \nu(\gamma; a_k)$ .

Bsp.: Der Satz kann auch "umgekehrt" zur Berechnung von Linienintegralen benutzt werden:  $\int_{|z|=2} \frac{z^2+1}{z^2+z+1} dz = ?$  - Der Integrand ist von der Form  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  mit  $f(z) = z^2+z+1$ . Die Nullstellen von  $f(z)$  sind  $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$  und liegen damit innerhalb des Kreises. Der Satz liefert also sofort:  $\int_{|z|=2} \frac{z^2+1}{z^2+z+1} dz = 4\pi i$  (Der Kreis  $|z|=2$  windet einmal und in positiver Richtung durchlaufen.)



Satz: Sei  $f$  eine in  $B(a, R)$  analytische Funktion,  $\alpha := f(a)$ . Besitzt  $f(z) - \alpha$  in  $z = a$  eine Nullstelle der Vielfachheit  $n$ , dann existieren  $\epsilon > 0$  und  $\delta > 0$  so, daß für  $|\eta - \alpha| < \delta$  die Gleichung  $f(z) = \eta$  genau  $n$  einfache Nullstellen in  $B(a, \epsilon)$  besitzt ( $\eta \neq \alpha$ ). (Eine einfache Nullstelle ist eine Nullstelle der Vielfachheit 1.)

Satz ("Open Mapping Theorem"): Sei  $G$  ein Gebiet und  $f$  eine nicht-konstante analytische Funktion auf  $G$ . Dann ist für jede offene Teilmenge  $U$  von  $G$  die Menge  $f(U)$  offen.

Korollar (Ableitung der Umkehrfunktion): Sei  $G$  ein Gebiet und  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  eine analytische Funktion, die  $G$  bijektiv auf  $\Omega = f(G)$  abbildet. Dann folgt:  $f': \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ist analytisch mit  $(f^{-1})'(\omega) = \frac{1}{f'(z)}$ , wo  $\omega = f(z)$  ist.

### Singularitäten

Def.: Eine Funktion  $f$  besitzt eine isolierte Singularität an der Stelle  $z = a$ , wenn  $f$  in  $B(a, R) \setminus \{a\}$  aber nicht in  $B(a, R)$  definiert und analytisch ist für ein  $R > 0$ .

Def.: Die Funktion  $f$  besitze an der Stelle  $z = a$  eine isolierte Singularität. Der Punkt  $a$  heißt hebbare Singularität, wenn eine analytische Funktion  $g: B(a, R) \rightarrow \mathbb{C}$  existiert mit  $g(z) = f(z)$  für  $0 < |z - a| < R$  ( $R > 0$ ).

Satz: Besitzt die Funktion  $f$  eine isolierte Singularität an der Stelle  $z = a$ , dann ist  $a$  genau dann eine hebbare Singularität, wenn gilt:  $\lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z) = 0$ .

Bsp.:  $\frac{\sin z}{z}$  besitzt eine hebbare Singularität im Nullpunkt, nicht aber  $\frac{\cos z}{z}$ :  
 $\lim_{z \rightarrow 0} z \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \sin z = 0$ ,  $\lim_{z \rightarrow 0} z \frac{\cos z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \cos z = 1 \neq 0$

Def.: Ist  $z = a$  eine isolierte Singularität der Funktion  $f$ , dann heißt  $a$  Pol von  $f$ , wenn  $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$  ist.

Def.: Eine isolierte Singularität einer Funktion, die weder eine hebbare Singularität noch ein Pol ist, heißt wesentliche Singularität.

P Sei  $G$  ein Gebiet,  $a$  ein Punkt in  $G$  und  $f$  eine analytische Funktion auf  $G \setminus \{a\}$  mit einem Pol an der Stelle  $z=a$ . Dann existieren eine natürliche Zahl  $m$  und eine analytische Funktion  $g: G \rightarrow \mathbb{C}$  so, daß  $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$  ist.

Def.: Die Funktion  $f$  besitzt einen Pol an der Stelle  $z=a$ ;  $m$  sei die kleinste natürliche Zahl, sodaß  $f(z)(z-a)^m$  an der Stelle  $z=a$  eine hebbare Singularität besitzt. Dann heißt der Punkt  $a$  Pol der Ordnung  $m$  von  $f$ .

P Die Funktion  $f$  besitzt einen Pol der Ordnung  $m$  an der Stelle  $z=a$ . Dann gilt:  
 $f(z) = \frac{A_m}{(z-a)^m} + \dots + \frac{A_1}{z-a} + g_1(z)$ , wobei  $A_m \neq 0$  und  $g_1$  eine analytische Funktion in  $B(a, R)$  ist.  $A_m(z-a)^{-m} + \dots + A_1(z-a)^{-1}$  heißt singulärer Teil von  $f$ .

Laurent-Reihenentwicklung: Sei  $f$  eine analytische Funktion in dem Ring  $\text{ann}(a; R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z-a| < R_2\}$ . Dann ist  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$  in  $\text{ann}(a; R_1, R_2)$ . Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Ring  $\text{ann}(a; r_1, r_2)$  mit  $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ . Die Koeffizienten  $a_n$  sind gegeben durch  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$ , wo  $\gamma$  ein Kreis  $|z-a| = r$  für irgendein  $r$  mit  $R_1 < r < R_2$  ist. Die Laurentreihe ist eindeutig.

Korollar: Sei  $z=a$  eine isolierte Singularität der Funktion  $f$  und  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$  die Laurentreihe von  $f$  in  $\text{ann}(a; 0, R) = B(a, R) \setminus \{a\}$ . Dann gilt:

- (a)  $z=a$  ist genau dann eine hebbare Singularität, wenn  $a_n = 0$  für alle  $n < -1$  ist.
- (b)  $z=a$  ist ein Pol der Ordnung  $m$  genau dann, wenn  $a_{-m} \neq 0$  und  $a_n = 0$  für alle  $n < -(m+1)$  ist.
- (c)  $z=a$  ist genau dann eine wesentliche Singularität, wenn  $a_n \neq 0$  für unendlich viele negative  $n$  gilt.

Bsp.: Die Funktion  $f(z) = \frac{\cos z}{z}$  besitzt einen Pol 1. Ordnung im Nullpunkt. Um das zu zeigen, berechnen wir die Laurentkoeffizienten  $a_n$  für negative  $n$  durch:  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^{n+1}} dz = 0$  für  $n \leq -2$ , weil dann der Integrand eine analytische Funktion ist ( $\gamma$  ist ein Kreis um 0 mit beliebigem Radius).  
 $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\cos z}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\cos \xi e^{i\theta}}{\xi e^{i\theta}} i \xi e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \xi e^{i\theta} d\theta \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 1 \neq 0$ .  
 Das Grenzübergang  $\xi \rightarrow 0$  ist zulässig, weil das Integral für jedes  $\xi > 0$  denselben Wert hat.

### Der Residuensatz:

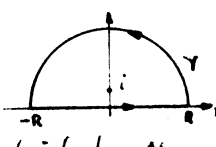
Def.: Sei  $f$  eine Funktion mit isolierter Singularität an der Stelle  $z=a$  und der Laurententwicklung  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$  um  $a$ . Dann heißt  $\text{Res}(f; a) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$  das Residuum von  $f$  an der Stelle  $a$ .

Residuensatz: Die Funktion  $f$  sei analytisch in einem Gebiet  $G$  mit Ausnahme der isolierten Singularitäten  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Ist  $\gamma$  eine geschlossene rektifizierbare Kurve in  $G \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$  mit  $\gamma \approx 0$  in  $G$ , dann gilt:  $\int_{\gamma} f = 2\pi i \sum_{k=1}^n \nu(\gamma; a_k) \text{Res}(f; a_k)$ .

P Sei  $f$  eine Funktion mit isolierter Singularität an der Stelle  $z=a$ . Dann gilt:

- (a) Ist  $a$  eine hebbare Singularität, so ist  $\text{Res}(f; a) = 0$ .
- (b) Ist  $a$  ein einfacher Pol, so ist  $\text{Res}(f; a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z)$ .
- (c) Ist  $a$  ein Pol der Ordnung  $m$  und  $g(z) = (z-a)^m f(z)$ , so ist  $\text{Res}(f; a) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(a)$ .

Standardbeispiel:  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = ?$  -  $f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$  ist in der oberen Halbebene mit Ausnahme des einfachen Poles  $z=i$  analytisch.  $\text{Res}(f; i) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i)f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}$ . Für den in der Figur angegebenen Weg  $\gamma$  gilt also nach dem Residuensatz:  $\int_{\gamma} f = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$  für jedes  $R > 1$  und damit auch im Grenzfalle  $R \rightarrow \infty$ . Der halbkreisförmige Teil von  $\gamma$  trägt im Limes  $R \rightarrow \infty$  nichts zum Linienintegral bei (einfache Abschätzung) und weil  $\frac{1}{x^2+1}$  eine gerade Funktion ist, folgt:  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int_{\gamma} f = \frac{\pi}{2}$ .



Bsp.:  $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$  für  $a > 1$ . Beweis:  $z = e^{i\theta} \Rightarrow \frac{dz}{i z} = d\theta$ ,  $\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$ .  
 $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}$ .  
 $z^2 + 2az + 1 = (z-\alpha)(z-\beta)$ , wobei  $\alpha = -a + \sqrt{a^2-1}$ ,  $\beta = -a - \sqrt{a^2-1}$ ;  $|\alpha| < 1$ ,  $|\beta| > 1$  (da  $a > 1$ ).  
 $\text{Res}(\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}, \alpha) = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}$ .  
 Mit (\*):  $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \frac{1}{2\pi i} (-i) \cdot \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$  ( $a > 1$ ).

### Das Argumentprinzip:

Def.: Sei  $G$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und  $f$  eine auf  $G$  mit Ausnahme von Polen definiert und analytische Funktion. Dann heißt  $f$  meromorph auf  $G$ .

Satz ("Argument Principle") Sei  $f$  eine in einer offenen Teilmenge  $G$  von  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion mit den Polen  $p_1, \dots, p_m$  und den Nullstellen  $z_1, \dots, z_n$  (gezählt entsprechend ihrer Ordnung). Ist  $\gamma$  eine geschlossene rektifizierbare Kurve in  $G \setminus \{p_1, \dots, p_m, z_1, \dots, z_n\}$  mit  $\gamma \approx 0$ , dann gilt:  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^n \nu(\gamma; z_k) - \sum_{j=1}^m \nu(\gamma; p_j)$ .

Satz: Sei  $f$  eine im Gebiet  $G$  meromorphe Funktion mit den Nullstellen  $z_1, \dots, z_n$  und den Polen  $p_1, \dots, p_m$  (gezählt entsprechend ihrer Ordnung). Ist  $g$  eine analytische Funktion in  $G$  und  $\gamma$  eine geschlossene rektifizierbare Kurve in  $G \setminus \{z_1, \dots, z_n, p_1, \dots, p_m\}$  mit  $\gamma \approx 0$ , dann gilt: 
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g \frac{f'}{f} = \sum_{j=1}^n g(z_j) u(\gamma; z_j) - \sum_{j=1}^m g(p_j) u(\gamma; p_j).$$

Satz: Eine Funktion  $f$  sei analytisch auf einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{C}$ , die  $\bar{B}(a, R)$  enthält, und eindeutig auf  $B(a, R)$ ; sei  $\Omega_f = f(B(a, R))$  und  $\gamma$  der Kreis  $|z-a|=R$ . Dann gilt für  $w \in \Omega$ : 
$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{zf'(z)}{f(z)-w} dz.$$

Satz von Rouché: Seien  $f$  und  $g$  zwei auf einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{C}$ , die  $\bar{B}(a, R)$  enthält, meromorphe Funktionen ohne Nullstellen oder Pole auf dem Kreis  $\gamma = \{z \mid |z-a|=R\}$ . Seien  $Z_f, Z_g$  ( $P_f, P_g$ ) die Anzahl Nullstellen (Pole) von  $f$  und  $g$  innerhalb  $\gamma$  (gezählt entsprechend ihrer Ordnung) und es gelte  $|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$  auf  $\gamma$  (streikt kleines!). Dann gilt  $Z_f - P_f = Z_g - P_g$ .

Bsp.: Wieviele Nullstellen besitzt die Funktion  $f(z) := 4z^n - z - e^z$  innerhalb des Einheitskreises? Sei  $g(z) := -(4z^n - z)$ .  $f$  und  $g$  sind ganze Funktionen, besitzen also kein Pol. Es ist einfach einzusehen, daß  $g$  die Nullstelle  $z=0$  und  $n-1$  weitere Nullstellen vom Betrag  $< 1$ , insgesamt also  $n$  Nullstellen in  $\{z \mid |z| < 1\}$  besitzt.  $|f(z) + g(z)| = |e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \leq |z| = |g(z)|$  für  $|z|=1$ .  $|f(z)| + |g(z)| \geq |g(z)| = |4z^n - z| = 4 - 1 = 3 > 1$  für  $|z|=1$ . D.h. es gilt der Satz von Rouché:  $Z_f - P_f = Z_g - P_g$ . Da  $P_f = P_g = 0$  ist, folgt  $Z_f = Z_g = n$ .

### Das Maximumprinzip

Maximumprinzip (1. Version): Ist  $f$  eine analytische Funktion in einem Gebiet  $G$  und  $a$  ein Punkt in  $G$  mit  $|f(a)| \geq |f(z)|$  für alle  $z$  in  $G$ , dann ist  $f$  eine konstante Funktion.

Maximumprinzip (2. Version): Sei  $G$  eine beschränkte offene Teilmenge in  $\mathbb{C}$  und  $f$  eine stetige Funktion auf  $\bar{G}$ , die in  $G$  analytisch ist, dann gilt:  $\max\{|f(z)| \mid z \in \bar{G}\} = \max\{|f(z)| \mid z \in \partial G\}$ .

### Das Lemma von Schwarz:

Schwarz'sches Lemma: Sei  $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  und  $f$  eine auf  $D$  analytische Funktion mit  $|f(z)| \leq 1$  für alle  $z$  in  $D$  und  $f(0) = 0$ . Dann gilt  $|f'(0)| \leq 1$  und  $|f(z)| \leq |z|$  für alle  $z$  in  $D$ .

Ist zusätzlich  $|f'(0)| = 1$  oder  $|f(z_0)| = |z_0|$  für ein  $z_0 \in D \setminus \{0\}$ , dann gilt es eine Konstante  $c$  mit  $|c| = 1$  so, daß gilt:  $f(z) = cz$  für alle  $z \in D$ .

Def.: Eine analytische Funktion, die  $D := \{z \mid |z| < 1\}$  bijektiv auf sich abbildet, heißt analytischer Isomorphismus des Einheitskreises.

P Sei  $f$  ein analytischer Isomorphismus des Einheitskreises mit  $f(0) = 0$ . Dann existiert  $c \in \mathbb{C}$  mit  $|c| = 1$  so, daß gilt:  $f(z) = cz$  für  $|z| < 1$ , d.h.  $f$  ist eine Rotation.

P Sei  $a \in \mathbb{C}$  mit  $|a| < 1$  und  $\varphi_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ . Dann ist  $\varphi_a$  ein analytischer Isomorphismus des Einheitskreises mit den Eigenschaften:  $\varphi_a^{-1} = \varphi_{-a}$ ,  $\varphi_a(a) = 0$ ,  $|\varphi_a(z)| = 1$  für  $|z| = 1$ ,  $\varphi_a'(0) = 1 - |a|^2$ ,  $\varphi_a'(a) = (1 - |a|^2)^{-1}$ .

Satz: Sei  $f$  ein analytischer Isomorphismus des Einheitskreises und  $f(a) = 0$ . Dann existiert  $c \in \mathbb{C}$  mit  $|c| = 1$  so, daß  $f(z) = c \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$  ist. Die Gleichung  $f(a) = 0$  hat immer eine Lösung in  $D := \{z \mid |z| < 1\}$ ; damit hat jedes analytische Isomorphismus die oben angegebene Form.

### Ganze Funktionen

Def.: Eine auf ganz  $\mathbb{C}$  analytische Funktion heißt ganze Funktion.

P Eine ganze Funktion hat eine Potenzreihenentwicklung mit unendlichem Konvergenzradius.

Satz von Liouville: Eine ganze und beschränkte Funktion ist eine Konstante.

Satz: Sei  $f$  eine ganze Funktion mit  $|f(z)| < C|z|^N$  für alle  $|z| > R > 0$ , dann ist  $f$  ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich  $N$ . Ist  $|f(z)| < C|z|^N$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ , dann ist  $f(z) = az^N$  für ein  $a \in \mathbb{C}$ .

**Fundamentalsatz der Algebra:** Ist  $p(z)$  ein nicht-konstantes Polynom, dann existiert eine komplexe Zahl  $a$  mit  $p(a) = 0$ .

**Korollar:** Sei  $p(z)$  ein Polynom mit den Nullstellen  $a_1, \dots, a_m$ , wo die Nullstelle  $a_j$  die Vielfachheit  $k_j$  habe. Dann ist  $p(z) = c \cdot (z - a_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (z - a_m)^{k_m}$  für eine komplexe Konstante  $c$ . Die Zahl  $k_1 + \dots + k_m$  heißt Grad des Polynoms  $p$ .

Der zum Fundamentalsatz der Algebra analoge Satz für ganze Funktionen ist der Satz von Picard:

**Satz von Picard:** Eine ganze Funktion, die zwei Werte in  $\mathbb{C}$  nicht annimmt, ist konstant. ("Little Theorem of Picard")

**Satz ("Great Theorem of Picard"):** Eine analytische Funktion  $f$  besitzt eine wesentliche Singularität an der Stelle  $z = a$ . Dann nimmt  $f$  in jeder Umgebung von  $a$  jede komplexe Zahl - mit einer möglichen Ausnahme - unendlich oft als Wert an.

Die Produktdarstellung ganzer Funktionen:

**Def.:** Sei  $\{z_n\}$  eine komplexe Folge. Dann heißt  $\prod_{n=1}^{\infty} z_n := \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^k z_n$  unendliches Produkt der Zahlen  $z_n$ .

**P** Sei  $\{z_n\}$  eine komplexe Folge mit  $\operatorname{Re} z_n > 0$  für alle  $n \geq 1$ . Dann konvergiert  $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$  genau dann gegen eine von 0 verschiedene Zahl, wenn die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \log z_n$  konvergiert ( $\log$  bezeichnet hier und im Folgenden den Hauptwert des Logarithmus).

**Def.:** Sei  $\{z_n\}$  eine komplexe Folge mit  $\operatorname{Re} z_n > 0$  für alle  $n$ . Dann heißt das unendliche Produkt  $\prod z_n$  absolut konvergent, wenn die Reihe  $\sum \log z_n$  absolut konvergiert.

**P** Sei  $\{z_n\}$  eine komplexe Folge mit  $\operatorname{Re} z_n > 0$  für alle  $n$ . Dann konvergiert das unendliche Produkt  $\prod z_n$  genau dann absolut, wenn die Reihe  $\sum (z_n - 1)$  absolut konvergiert.

**Satz:** Sei  $G$  ein Gebiet und  $\{f_n\}$  eine Folge in  $G$  analytischer Funktionen, in der kein  $f_n$  identisch verschwindet. Konvergiert die Reihe  $\sum (f_n(z) - 1)$  absolut und gleichmäßig auf kompakten Unterumgebungen von  $G$ , dann konvergiert  $\prod f_n(z)$  gegen eine in  $G$  analytische Funktion  $f$ . Ist  $a$  eine Nullstelle von  $f$ , dann ist  $a$  Nullstelle von unendlich vielen Funktionen  $f_n$  und die Vielfachheit der Nullstelle  $a$  von  $f$  ist gleich der Summe der Vielfachheiten der Nullstellen  $a$  von  $f_n$ .

**Def.:**  $E_p(z)$  definiert durch:  $E_0(z) := (1-z)$ ,  $E_p(z) := (1-z) \exp(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p})$ ,  $p \geq 1$ . heißt Elementarfaktor.

**P**  $E_p(\frac{z}{a})$  besitzt eine einzige - einfache - Nullstelle in  $z = a$ . Für  $|z| \leq 1$  gilt  $|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}$  für alle  $p \geq 0$ .

**Satz:** Sei  $\{a_n\}$  eine komplexe Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$  und  $a_n \neq 0$  für alle  $n \geq 1$ . Ist  $\{p_n\}$  eine Folge ganzer Zahlen (nicht-negativ) so, daß  $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{r}{|a_n|})^{p_n+1} < \infty$  ist für alle  $r > 0$ , dann ist  $f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(\frac{z}{a_n})$  eine ganze Funktion mit Nullstellen genau an den Punkten  $a_n$ ; kommt  $z_0$  in der Folge  $\{a_n\}$  genau  $m$  Mal vor, so besitzt  $f$  an der Stelle  $z = z_0$  eine Nullstelle der Ordnung  $m$ . Für  $p_n = n-1$  konvergiert die obige Reihe sicher.

**Satz ("Weierstrass Factorization Theorem")** Sei  $f$  eine ganze Funktion und  $\{a_n\}$  ihre von 0 verschiedenen Nullstellen (aufgeführt entsprechend ihrer Vielfachheit; besitze  $f$  an der Stelle 0 eine Nullstelle der Ordnung  $m \geq 0$  ( $m=0$ : keine Nullstelle)). Dann existieren eine ganze Funktion  $g$  und eine Folge nichtnegativer ganzer Zahlen  $\{p_n\}$  so, daß  $f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(\frac{z}{a_n})$  ist.

**Bsp.:**  $\sin \pi z$  ist eine ganze Funktion mit den einfachen Nullstellen  $n \in \mathbb{Z}$  (und keinen weiteren). Der Satz sagt, daß  $\sin \pi z = z e^{g(z)} \prod_{n \neq 0} (1 - \frac{z}{n}) e^{\frac{z}{n}}$  =  $z e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2})$ . Eine nichttriviale Rechnung zeigt, daß  $e^{g(z)} = \pi$  sein muß. Es gilt also:  $\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2})$ .

### Spezielle analytische Funktionen

Die  $\Theta$ -Funktion:

**Def.:**  $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ . Sei  $z \in \mathbb{C}$ ,  $w \in H$ .  $\Theta(z, w) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n z} e^{\pi i n^2 w}$

**Satz:** Die Reihe  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n z} e^{\pi i n^2 w}$  konvergiert absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von  $\mathbb{C} \times H$ , d.h.  $\Theta(z, w)$  ist für alle  $z \in \mathbb{C}$ ,  $w \in H$  eine wohldefinierte analytische Funktion.

Satz: Die  $\theta$ -Funktion besitzt folgende Eigenschaften ( $z \in \mathbb{C}, \omega \in \mathbb{H}$ ):

- (1)  $\theta(z+1, \omega) = \theta(z, \omega)$
  - (2)  $\theta(z+\omega, \omega) = e^{-2\pi i(z+\frac{1}{2}\omega)} \cdot \theta(z, \omega)$
  - (3)  $\theta(z, \omega) = 0 \iff z = \frac{1+\omega}{2} + l\omega + k$ ,  $l, k \in \mathbb{Z}$
  - (4)  $\theta(0, it) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 / t} = \sqrt{t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  (Jacobi-Identität)
  - (5)  $\sqrt{\frac{t}{i}} \theta(z, \frac{1}{i\omega}) = e^{-\pi i z^2 / \omega} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi i (z+\omega n)^2 / \omega}$  (Jacobi-Transformation)
  - (6)  $\theta(z, -1/\omega) = \sqrt{\frac{\omega}{i}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \omega (z+n)^2}$
- $(\sqrt{\frac{\omega}{i}} = \sqrt{r} e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})}, \omega = r e^{i\theta}, \theta \in ]0, \pi[)$

Bemerkung:  $\theta(z, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n z} e^{\pi i n^2 \omega}$  ist eine Fourier-Reihe;  $\hat{\theta}(\omega) = e^{\pi i \omega^2}$ .

### Die Gamma-Funktion:

Def.: Die Gamma-Funktion,  $\Gamma(z)$ , ist die auf  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion mit einfachen Polen an den Stellen  $z = 0, -1, -2, \dots$ , definiert durch  $\Gamma(z) := \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{n})^{-1} e^{z/n}$ , wo die Konstante  $\gamma$  so gewählt ist, daß  $\Gamma(1) = 1$ .  $\gamma$  heißt Eulersche Konstante.

P  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \log n \right] = 0,57722 \dots$

Gaußsche Formel: Für  $z \neq 0, -1, -2, \dots$  gilt:  $\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \dots (z+n)}$ .

Funktionalgleichung: Für  $z \neq 0, -1, -2, \dots$  gilt:  $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$ .

Die Gamma-Funktion ist eine Verallgemeinerung der Fakultät, es gilt nämlich  $\Gamma(n+1) = n!$  für  $n \in \mathbb{N}_0$ .

P  $\text{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$ ,  $n \geq 0$ ;  $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(n+z)}$ ;  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .

Satz: Ist  $\text{Re } z > 0$ , so gilt:  $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ .

### Die Riemannsche Zeta-Funktion:

Def.: Die Riemannsche Zeta-Funktion ist für  $\text{Re } z > 1$  definiert durch  $\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ .

P  $\zeta(z)$  ist für  $\text{Re } z > 1$  eine analytische Funktion.

Satz (Euler):  $\zeta(z) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1-p^{-z}}$

Funktionalgleichungen:  $\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1} \Gamma(1-z) \zeta(1-z) \sin \frac{\pi}{2} z$  (1)  
 $\pi^{-z/2} \Gamma(z/2) \zeta(z) = \pi^{(1-z)/2} \Gamma((1-z)/2) \zeta(1-z)$  (2)

Satz: Die Zeta-Funktion kann (mithilfe der Funktionalgleichung) als in ganz  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion mit einem einzigen einfachen Pol an der Stelle  $z = 1 \rightarrow \text{Res}(\zeta; 1) = 1$  definiert werden. Für  $z \neq 1$  erfüllt  $\zeta$  die Funktionalgleichung (1). Die einfachen Nullstellen  $z = -2, -4, -6, \dots$  sind die einzigen Nullstellen von  $\zeta$  außerhalb  $\{z \mid 0 \leq \text{Re } z \leq 1\}$ .

Riemannsche Vermutung: Ist  $z$  eine Nullstelle von  $\zeta$  innerhalb von  $\{z \mid 0 \leq \text{Re } z \leq 1\}$ , dann gilt  $\text{Re } z = \frac{1}{2}$  (Man kann zeigen, daß es unendlich viele Nullstellen auf  $\text{Re } z = \frac{1}{2}$  gibt und keine auf  $\text{Re } z = 0$  oder  $1$ ).

P Für  $\text{Re } z > 1$  gilt:  $\zeta(z) \Gamma(z) = \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$ .

### Möbius Transformationen

Def.: Eine Abbildung von der Form  $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  heißt gebrochen lineare Transformation.  
 Gib zusätzlich  $ad-bc \neq 0$ , so heißt  $S$  Möbius Transformation. ( $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ )

Satz: Das Produkt (die Komposition) zweier Möbius Transformationen ist eine Möbiustransformation; Ist  $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  eine Möbiustransformation, dann ist die Umkehrabbildung  $S^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$  auch eine Möbiustransformation; die Identität ist eine Möbiustransformation. Das heißt, die Möbiustransformationen bilden eine Gruppe.

Die Koeffizienten einer Möbiustransformation sind nicht eindeutig:  $S(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(\lambda a)z + (\lambda b)}{(\lambda c)z + (\lambda d)}$  für  $\lambda \neq 0$ . Insbesondere können wir  $a, b, c, d$  immer so wählen, daß  $ad-bc = 1$  ist.

$SL(2, \mathbb{C}) := \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, \det g = ad-bc = 1 \right\}$ . Die Abbildung  $SL(2, \mathbb{C})$

$\longrightarrow$  {Möbiustransformationen},  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto T_g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  ist ein zwei-eindeutiges

Zusammenhang: Aus  $T_g = T_h$  folgt nämlich:  $h = \pm g$ . Umher gilt:  $T_{g_1} \circ T_{g_2} = T_{g_2 g_1}$  und  $(T_g)^{-1} = T_{g^{-1}}$ .

P Die Fixpunkte einer Möbiustransformation  $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  sind die Lösungen der Gleichung  $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ . Besteht  $S$  aus 3 oder mehr Fixpunkten, dann ist  $S$  die Identität. ( $z$  ist Fixpunkt von  $S$ , wenn gilt:  $S(z) = z$ .)

P Sei  $S$  eine Möbiustransformation mit der Eigenschaft  $S(a) = \alpha$ ,  $S(b) = \beta$ ,  $S(c) = \gamma$ ,  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .  $a, b, c$  seien paarweise verschieden. Dann ist  $S$  eindeutig bestimmt.

Anwendung: Seien  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$  paarweise verschieden. Die Möbiustransformation  $S$  ist definiert durch:

$$S(z) := \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}, \text{ falls } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}; \quad S(z) := \frac{z-z_1}{z-z_3}, \text{ falls } z_2 = \infty; \quad S(z) := \frac{z_2-z_3}{z-z_1}, \text{ falls } z_3 = \infty; \quad S(z) := \frac{z-z_1}{z-z_3}, \text{ falls } z_2 = \infty. \text{ Dann ist } S \text{ die eindeutige Möbiustransformation mit } S(z_1) = 1, S(z_2) = 0, S(z_3) = \infty.$$

Sei  $S_1$  so gewählt, daß  $S_1(a) = 1$ ,  $S_1(b) = 0$ ,  $S_1(c) = \infty$  und  $S_2$  so, daß  $S_2(\alpha) = 1$ ,  $S_2(\beta) = 0$ ,  $S_2(\gamma) = \infty$  ist. Dann ist  $T := S_1 \circ S_2^{-1}$  die eindeutige Möbiustransformation mit  $T(a) = \alpha$ ,  $T(b) = \beta$  und  $T(c) = \gamma$ .

Satz: Eine Möbiustransformation führt Kreise in Kreise über (Eine Gerade gilt als Kreis mit unendlichem Radius).

Symmetriep Prinzip: Liegt ein Punkt innerhalb (außerhalb) eines Kreises, dann liegt sein Bild unter einer Möbiustransformation innerhalb (außerhalb) des Bildes des Kreises.

Bsp.:  $g_1(z) := \frac{z-1}{z+1}$  bildet  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$  bijektiv auf die Einheitskreisscheibe  $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  ab;  $g_1^{-1}(z) = \frac{1+z}{1-z}$ .  
 $g_2(z) := \frac{z-i}{z+i}$  bildet  $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$  bijektiv auf  $D$  ab;  $g_2^{-1}(z) = \frac{z+i}{z-i}$ .  
 Mit Hilfe dieser Möbiustransformationen können Aussagen über  $D$  auf die rechte bzw. obere Halbebene übertragen werden (vgl. Lemma von Schwarz).  
 $\varphi_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ ,  $|a| < 1$ , bildet  $D$  bijektiv auf sich ab;  $\varphi_a^{-1} = \varphi_{-a}$  (s. S. 7).

Satz: Alle analytischen Isomorphismen von  $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$  sind von der Form  $\lambda \frac{az+b}{cz+d}$  mit  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$ ,  $ad-bc = 1$ . (Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann  $\lambda = 1$  gesetzt werden.)

Die Winkeltheorie analytischer Abbildungen:

Def.: Seien  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\sigma: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  zwei stetig differenzierbare Wege, die sich in  $z_0$  schneiden, d.h. es gilt  $t_1 \in ]a, b[$  und  $t_2 \in ]c, d[$  mit  $\gamma(t_1) = \sigma(t_2) = z_0$ . Dann ist der Schnittwinkel der beiden Kurven in  $z_0$  definiert durch  $\angle(\gamma, \sigma; z_0) := \arg \sigma'(t_2) - \arg \gamma'(t_1)$ .

Satz: Sei  $G$  ein Gebiet,  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  eine analytische Funktion. Dann ist  $f$  an jedem Punkt  $z_0 \in G$ , wo  $f'(z_0) \neq 0$  ist, winkeltreu. - Exakte Formulierung: Seien  $\gamma$  und  $\sigma$  zwei stetig differenzierbare Wege mit Schnittpunkt  $z_0 \in G$ , die die Voraussetzungen der obigen Definition erfüllen. Dann gilt:  $\angle(\gamma, \sigma; z_0) = \angle(f \circ \gamma, f \circ \sigma; z_0)$  für alle  $z_0 \in G$  mit  $f'(z_0) \neq 0$ .

## Hyperbolische Geometrie

$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \cong \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ . Im Folgenden sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow H$  immer ein stetig differenzierbarer Weg.

P  $H$  zusammen mit der Multiplikation  $z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2, y_1 y_2)$  ist eine nichtkommutative Gruppe. Einselement:  $(0, 1)$  ( $i$ ); Inverse:  $z^{-1} = (x, y)^{-1} = (-x y^{-1}, y^{-1})$ .

Def.:  $T_z H := \left\{ \frac{d}{dt} \gamma(t) \Big|_{t=t_0} \mid \gamma(t_0) = z \in H \right\}$  heißt Tangentenraum von  $H$  an der Stelle  $z \in H$ .

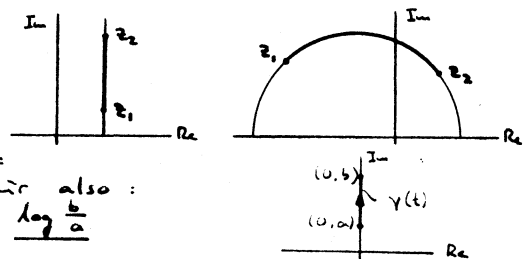
$T_z H$  ist ein Vektorraum und isomorph zu  $\mathbb{R}^2$ . Für  $v, w \in T_z H$  definieren wir ein Skalarprodukt durch  $\langle v, w \rangle_z := v_1 w_1 + v_2 w_2$ . Nun betrachten wir die Abbildung  $L_z: H \rightarrow H, u \mapsto z \cdot u$  für jedes  $z \in H$  (Produkt in  $H$ , vgl. obige Proposition!). Ihre Ableitung  $(L_z)_\#$  - gegeben durch die Jacobi-Matrix - ist eine Abbildung auf dem Tangentenraum:  $(L_z)_\#: T_u H \rightarrow T_{zu} H$ . Nun definieren wir:  $\langle v, w \rangle_z := \langle (L_z)_\# v, (L_z)_\# w \rangle_{zu}$ . Explizites Durchrechnen führt auf die folgende Definition:  $\langle v, w \rangle_z := \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{y^2}$  für  $v, w \in T_z H$ .

Def.: Sei  $z = (x, y) \in H$ ;  $v = (v_1, v_2)$  und  $w = (w_1, w_2) \in T_z H (\cong \mathbb{R}^2)$ . Dann heißt  $\langle v, w \rangle_z := \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{y^2}$  hyperbolische Metrik (hyperbolisches Skalarprodukt) auf  $H$ .

Def.: Die hyperbolische Länge der Kurve  $\gamma$  ist definiert durch:  $L_\gamma := \int_0^1 \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle_{\mathbb{H}(t)}} dt$ , das heißt mit  $\gamma(t) = (y_1(t), y_2(t))$  gilt:  $L_\gamma = \int_0^1 \frac{\sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}}{y_2} dt$ .

Def.: Der hyperbolische Abstand zweier Punkte  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$  ist definiert durch:  $d(z_1, z_2) := \inf \{ L_\gamma \mid \text{alle Kurven } \gamma \text{ mit } \gamma(0) = z_1 \text{ und } \gamma(1) = z_2 \}$ .

Satz: Der geodätische Weg (der Weg mit der kleinsten Länge) zwischen zwei Punkten  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$  ist die Gerade, falls  $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ , sonst der Thaleskreis über der reellen Achse durch  $z_1$  und  $z_2$ .



Bsp.: Sei  $z_1 = (0, a)$ ,  $z_2 = (0, b)$ .  $d(z_1, z_2) = ?$   
Gemäß dem obigen Satz ist der geodätische Weg die Verbindungsstrecke von  $z_1$  und  $z_2$  auf der imaginären Achse:  
 $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (0, (1-t)a + tb)$ . Damit erhalten wir also:  
 $d(z_1, z_2) = L_\gamma = \int_0^1 \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{y} dt = \int_0^1 \frac{\dot{y}}{y} dt = \log y(t) \Big|_{t=0}^{t=1} = \log \frac{b}{a}$

Sei  $g \in \operatorname{SL}(\mathbb{R}, 2) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}$ . Dann ist  $T_g(z) := \frac{az+b}{cz+d}$  eine Abbildung von  $\mathbb{H}$  auf  $\mathbb{H}$  (ein analytischer Homöomorphismus von  $\mathbb{H}$ , s.S. 10).

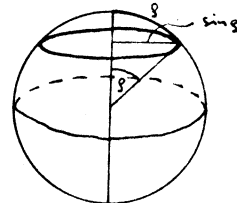
Satz: Sei  $g \in \operatorname{SL}(\mathbb{R}, 2)$ . Dann sind die hyperbolischen Längen der Wege  $\gamma$  und  $T_g \gamma$  gleich, d.h. es gilt:  $\int_0^1 \frac{|\dot{\gamma}(t)|}{\operatorname{Im} \gamma(t)} dt = \int_0^1 \frac{|\dot{T}_g \gamma(t)|}{\operatorname{Im} T_g \gamma(t)} dt$ .

Satz: Sei  $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  eine analytische Funktion. Dann ist die hyperbolische Länge des Weges  $f \circ \gamma$  kleiner oder gleich der hyperbolischen Länge des Weges  $\gamma$ .

Def.: Die Krümmung einer zweidimensionalen Riemannschen Fläche an einer Stelle  $p$  ist definiert durch  $K(p) := \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{2\pi s - C(s)}{s^3}}{\frac{2\pi}{s^3}}$ , wobei  $C(s)$  der Umfang eines Kreises mit Mittelpunkt  $p$  und Radius  $s$  auf der Fläche ist.

Beispiele:

- ① Euklidische Geometrie:  $C(s) = 2\pi s \Rightarrow K(p) = 0$
- ② Kugelgeometrie:  $C(s) = 2\pi \sin s = 2\pi s - 2\pi \frac{s^3}{3!} + 2\pi \frac{s^5}{5!} - \dots$   
 $\Rightarrow K(p) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2\pi s - 2\pi \frac{s^3}{3!}}{s^3} = 1$  (vgl. Fig.)
- ③ Hyperbolische Geometrie:  $K(p) = -1$  ( $C(s) = 2\pi \sinh s$ ; nicht-trivial)



### Der Satz von Ascoli

Def.: Sei  $G$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und  $(\Omega, d)$  ein vollständiger metrischer Raum. Dann bezeichnet  $C(G, \Omega)$  die Menge aller stetigen Funktionen  $f: G \rightarrow \Omega$  (Üblicherweise ist  $\Omega = \mathbb{C}$ ).

Satz: Sei  $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$  mit  $K_n$  kompakt und  $K_n \subset \operatorname{Int} K_{n+1}$  für alle  $n \geq 1$ ;  $\rho_n(f, g) := \sup \{ d(f(z), g(z)) \mid z \in K_n \}$ ,  $\rho(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^n} \right) \frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)}$  für alle  $f, g \in C(G, \Omega)$ . Dann ist  $(C(G, \Omega), \rho)$  ein vollständiger metrischer Raum.

Def.: Eine Teilmenge ("Familie")  $\mathcal{F}$  von  $C(G, \Omega)$  heißt normal, falls jede Folge in  $\mathcal{F}$  eine Teilfolge besitzt, die gegen eine Funktion  $f \in C(G, \Omega)$  konvergiert.

Def.: Eine Familie  $\mathcal{F} \subset C(G, \Omega)$  heißt gleichgradig stetig an der Stelle  $z_0 \in G$ , wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, sodass für  $|z - z_0| < \delta$  gilt  $d(f(z), f(z_0)) < \varepsilon$  für alle  $f \in \mathcal{F}$ .  $\mathcal{F}$  heißt gleichgradig stetig auf einer Menge  $E \subset G$ , wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, sodass für alle  $z, z' \in E$  mit  $|z - z'| < \delta$  und alle  $f \in \mathcal{F}$  gilt:  $d(f(z), f(z')) < \varepsilon$ .

Satz von Arzela - Ascoli: Eine Familie  $\mathcal{F} \subset C(G, \Omega)$  ist genau dann normal, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (a) Die Menge  $\{f(z) \mid f \in \mathcal{F}\}$  ist für alle  $z \in G$  kompakt in  $\Omega$ .
- (b)  $\mathcal{F}$  ist gleichgradig stetig an jeder Stelle von  $G$ .

Def.: Sei  $G$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$ . Dann bezeichnet  $H(G)$  die Menge der analytischen Funktionen  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ . Natürlich ist  $H(G)$  eine Teilmenge von  $C(G, \mathbb{C})$ .

Def.: Eine Familie  $\mathcal{F} \subset H(G)$  heißt lokal beschränkt, wenn zu jedem Punkt  $a \in G$  Konstanten  $M > 0$  und  $r > 0$  existieren, sodass für alle  $f \in \mathcal{F}$  gilt:  $|f(z)| \leq M$  für  $|z - a| < r$ . Eine Familie  $\mathcal{F} \subset H(G)$  heißt gleichmäßig beschränkt, wenn eine Konstante  $M > 0$  existiert, sodass  $|f(z)| \leq M$  für alle  $z \in G$  und alle  $f \in \mathcal{F}$ .

Satz ("Montel's Theorem"): Eine Familie  $\mathcal{F}$  in  $H(G)$  ist genau dann normal, wenn  $\mathcal{F}$  lokal beschränkt ist.

Def.:  $C^p(\mathbb{C}) := \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist } p\text{-mal stetig differenzierbar.} \}$ ,  $p \geq 1$   
 $C^0(\mathbb{C}) := \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist stetig.} \}$   
 $C^p(T') := \{ f \in C^p(\mathbb{C}) \mid f(x+1) = f(x) \text{ f\"ur alle } x \in \mathbb{R} \}$ ,  $p \geq 0$ . Das heißt,  $C^p(T')$  bezeichnet die Menge der komplexwertigen Funktionen mit der Periode 1.

Def.: Seien  $f, g \in C^p(\mathbb{C})$ . Dann definiert  $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$  ein Skalarprodukt (inneres Produkt),  $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$  eine Norm (absoluter Betrag) auf  $C^p(\mathbb{C})$ .

Def.:  $\ell^2(\mathbb{Z}) := \{ x = (\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots) \mid a_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \}$ . Seien  $x = (\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots)$  und  $y = (\dots, b_{-1}, b_0, b_1, \dots)$  in  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Dann definiert  $\langle x, y \rangle_{\ell^2} := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_n}$  ein Skalarprodukt,  $\|x\|_{\ell^2} := \sqrt{\langle x, x \rangle_{\ell^2}}$  eine Norm auf  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .

$\ell^2(\mathbb{Z})$  ist ein Hilbertraum, d.h. ein vollständiger normierter Vektorraum; dagegen ist  $C^0(T')$  nicht vollständig, d.h. es gilt ein Cauchy-Folge in  $C^0(T')$ , die nicht gegen einen Punkt in  $C^0(T')$  konvergiert!

P Seien  $n, m \in \mathbb{Z}$  beliebig. Dann gilt:  $e^{2\pi i n x} \in C^p(T')$  f\"ur alle  $p \geq 0$  und  $\langle e^{2\pi i n x}, e^{2\pi i m x} \rangle = \delta_{n,m}$ .

Def.: Die Abbildung  $\wedge: C^p(T') \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ ,  $f \mapsto \hat{f} = (\dots, \hat{f}(-1), \hat{f}(0), \hat{f}(1), \dots)$  definiert durch  $\hat{f}(n) := \langle f, e^{2\pi i n x} \rangle = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx$  f\"ur alle  $n \in \mathbb{Z}$  heißt Fourier-Reihenentwicklung. Die komplexen Zahlen  $\hat{f}(n)$  heißen Fourier-Koeffizienten von  $f$ .

Besselsche Ungleichung: Sei  $f \in C^0(T')$ . Dann gilt:  $\|\hat{f}\|_{\ell^2} \leq \|f\|$ .

Satz: Sei  $f \in C^1(T')$  und  $S_n := \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Dann konvergiert die Folge  $\{S_n\}$  gleichmäßig gegen  $f$ ; insbesondere gilt:  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$ . Unter ist  $\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{n} \|f'\|$ .

Satz: Sei  $f \in C^1(T')$ . Dann gilt:  $\hat{f}'(n) = 2\pi i n \hat{f}(n)$  f\"ur alle  $n \in \mathbb{Z}$ .

Korollar: Sei  $f \in C^p(T')$ . Dann gilt:  $\hat{f}^{(k)}(n) = (2\pi i n)^k \hat{f}(n)$ ,  $1 \leq k \leq p$ , f\"ur alle  $n \in \mathbb{Z}$ .

Satz: Die Fourier-Reihenentwicklung  $\wedge: C^1(T') \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$  ist injektiv.

Anwendung: Die Injektivität der Fourierentwicklung kann dann benutzt werden, die Gleichheit von Funktionen nachzuweisen: Zwei Funktionen  $f, g$  sind stetig differenzierbar und periodisch, d.h.  $f, g \in C^1(\mathbb{C})$ . Dann gilt:  $f = g \iff \hat{f} = \hat{g}$ !

Parsevalgleichung: Sei  $f \in C^1(T')$ . Dann gilt:  $\|f\| = \|\hat{f}\|_{\ell^2}$ .

Achtung: Die letzten 5 Sätze gelten nicht f\"ur Funktionen aus  $C^0(T')$ . Insbesondere braucht die Fourier-Reihe einer Funktion aus  $C^0(T')$  nicht f\"ur jedes  $x$  zu konvergieren.

Satz: Sei  $f \in C^p(T')$ . Dann gilt:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 n^{2p} < \infty$ .

Korollar: Sei  $f \in C^\infty(T')$ . Dann gilt  $\hat{f}(n) = O(n^{-k})$  f\"ur jedes  $k > 0$ .

Def.: Eine Funktion  $f \in C^0(T')$  heißt reell analytisch, wenn zu jedem  $x \in [0,1]$  ein  $\varepsilon_x > 0$  existiert, so daß  $f$  auf  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-x| < \varepsilon_x\}$  eine analytische Funktion ist. Bezeichnung:  $C^\omega(T') := \{ f \in C^0(T') \mid f \text{ reell analytisch} \}$ .

P  $C^\omega(T') \subset C^\infty(T')$ .

Satz: Sei  $f \in C^\omega(T')$ . Dann gilt es  $\varepsilon > 0$ , so daß  $|\hat{f}(n)| < C \cdot e^{-\varepsilon |n|}$  ist.

Der anschauliche Gehalt der letzten Sätze ist: Je glatter eine Funktion ist, umso schneller werden die Fourier-Koeffizienten klein f\"ur großes  $|n|$  - oder: umso besser konvergiert die Fourier-Reihe.

Satz: Sei  $f \in C^0(T')$ . Dann konvergiert  $\sigma_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$  gleichmäßig gegen  $f$  (Cesaro-Konvergenz).

Fourierreihen f\"ur Funktionen mit beliebiger Periode:

Sei  $g$  eine quingend reguläre (s.o.) Funktion mit der Periode  $a$ , d.h.  $g(x+a) = g(x) \forall x \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n) e^{i \frac{2\pi n}{a} x} \quad \text{mit} \quad \hat{g}(n) = \frac{1}{a} \int_0^a g(x) e^{-i \frac{2\pi n}{a} x} dx$$

$$\text{bzw.} \quad g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi n}{a} x + b_n \sin \frac{2\pi n}{a} x \right) \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \cos \frac{2\pi n}{a} x dx, \quad b_n = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin \frac{2\pi n}{a} x dx$$

# Fourier - Transformation

Def.: Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion. Dann heißt die Abbildung  $\wedge: f \mapsto \hat{f}$ , definiert durch  $\hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , Fourier - Transformation.

P  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} e^{-ikx} dx = e^{-k^2/2}$ , das heißt, die Funktion  $x \mapsto e^{-x^2/2}$  ist eine Eigenfunktion der Fourier-Transformation zum Eigenwert 1.

Def.:  $C_0(\mathbb{R}') := \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig, } \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0 \}$   
 $L(\mathbb{R}') := \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig, } \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty \}$

$L(\mathbb{R}')$  ist ein komplexer Vektorraum.  $\|f\| := \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$  definiert eine Norm auf  $L(\mathbb{R}')$ . Für  $f \in L(\mathbb{R}')$  und  $k \in \mathbb{R}$  existiert  $\hat{f}(k)$ .

Satz: Die Fourier-Transformation  $\wedge$  ist eine injektive lineare Abbildung von  $L(\mathbb{R}')$  in  $C_0(\mathbb{R}')$ ; es gilt:

- (1)  $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(k) = 0$  (Lemma von Riemann - Lebesgue)
- (2) Die Fourier-Transformation einer Funktion aus  $L(\mathbb{R}')$  ist gleichmäßig stetig.
- (3)  $\sup_{k \in \mathbb{R}} |\hat{f}(k)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|$
- (4)  $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) \hat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) dx$  für  $f, g \in L(\mathbb{R}')$
- (5)  $\hat{\hat{f}}(k) = f(-k)$ ,  $f \in L(\mathbb{R}')$
- (6)  $f_y(x) := f(x-y)$ ,  $f \in L(\mathbb{R}')$   $\Rightarrow \hat{f}_y(k) = e^{-iky} \hat{f}(k)$
- (7)  $\hat{f}(\lambda \cdot)(k) = \frac{1}{|\lambda|} \hat{f}\left(\frac{k}{\lambda}\right)$ ,  $f \in L(\mathbb{R}')$ ,  $\lambda \neq 0$

Def.: Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion. Dann heißt die Abbildung  $\vee: f \mapsto \check{f}$ , definiert durch  $\check{f}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(k) e^{ikx} dk$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , Fourier - Umkehrtransformation.

Satz: Seien eine Funktion  $f$  und ihre Fourier-Transformierte  $\hat{f}$  aus  $L(\mathbb{R}')$ . Dann gilt:  $f = (\hat{\hat{f}})^\vee$ , das heißt  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(k) e^{ikx} dk$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Korollar: Seien  $f$  und  $\hat{f}$  aus  $L(\mathbb{R}')$ . Dann gilt:  $\hat{\hat{f}}(y) = f(-y)$ .

Korollar: Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$  ein Eigenwert der Fourier-Transformation, das heißt, es existiert  $f \in L(\mathbb{R}')$ ,  $f \neq 0$ , so, daß  $\hat{f} = \lambda f$  ist. Für die Eigenwerte  $\lambda$  gilt:  $\lambda^4 = 1$ .

Def.: Faltungsprodukt:  $f * g(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy$ ,  $f, g \in L(\mathbb{R}')$

P Das Faltungsprodukt ist kommutativ, assoziativ und es gilt:  $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$ .

Def.:  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist beliebig oft diff'bar; } |x|^n \frac{d^n f}{dx^n} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0 \quad \forall n, n \in \mathbb{N}_0 \}$

Anschaulich: Jede Abbildung einer Funktion aus  $\mathcal{S}(\mathbb{R}')$  geht schneller gegen Null als irgendeine Potenz von  $\frac{1}{x}$ . Die Definition von  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  ist eine Konsequenz der Feststellungen:

- je schneller  $f$  abnimmt, desto öfter ist  $\hat{f}$  differenzierbar.
- je öfter  $f$  differenzierbar ist, desto schneller nimmt  $\hat{f}$  ab.

Wird  $\mathcal{S}(\mathbb{R}') \subset L(\mathbb{R}')$  ist, gelten alle oben Sätze auch für Funktionen aus  $\mathcal{S}(\mathbb{R}')$ .

Satz: Für  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}')$  gilt:

- (1)  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
- (2)  $\frac{d}{dk} \hat{f}(k) = ik \hat{f}(k)$
- (3)  $\frac{d}{dk} \hat{f}(k) = (-ik f(\cdot))(k)$
- (4)  $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Satz: Die Fourier-Transformation  $\wedge: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$  ist bijektiv.

Um die Eigenwerte und Eigenfunktionen von  $\wedge$  zu bestimmen, betrachten wir Differentialoperatoren auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ :

Def.:  $A := \frac{1}{i\sqrt{2}} \left( \frac{d}{dx} + x \right)$  (Abszissenoperator);  $A^* := \frac{1}{i\sqrt{2}} \left( -\frac{d}{dx} + x \right)$  (Aufzissenoperator, zu  $A$  adjungierter Operator);  $H := A^* A = \frac{1}{2} \left( -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 - 1 \right)$  (Hamiltonoperator).

P  $\hat{A}f = i A \hat{f}$ ,  $\hat{A}^* f = -i A^* \hat{f}$ ,  $\hat{H}f = H \hat{f}$ , d.h.  $H$  und  $\wedge$  kommutieren. ( $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ )

Def.:  $\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx$ ,  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}')$ , definiert ein Skalarprodukt auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}')$ .

P  $\langle \frac{d}{dx} f, g \rangle = \langle f, \frac{d}{dx} g \rangle$ ,  $\langle x f, g \rangle = \langle f, x g \rangle$ ,  $\langle A f, g \rangle = \langle f, A^* g \rangle$ ,  $\langle H f, g \rangle = \langle f, H g \rangle$ .  
 Daher die Bezeichnung adjungierter Operatoren!  $H$  ist selbstadjungiert,  $H^* = H$ .

P  $[A, A^*] := A A^* - A^* A = 1$ ,  $[A, A^{n+1}] = n A^{n+1}$

Def.: Die hermiteschen Funktionen sind definiert durch:  $h_0(x) := \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{\pi}^{1/2}}$ ,  $h_n(x) := \frac{(A^*)^n h_0}{\sqrt{n!}} = \frac{A^n h_{n-1}}{\sqrt{n!}}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Satz: Für die hermiteschen Funktionen gilt:

- (1)  $h_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \forall n \geq 0$
- (2)  $\langle h_n, h_m \rangle = \delta_{nm}$ , d.h. die hermiteschen Funktionen sind orthonormiert.
- (3)  $A h_0 = 0$ ,  $A h_n = \sqrt{n} h_{n-1}$ ,  $n \geq 1$ ;  $A^* h_n = \sqrt{n+1} h_{n+1}$ ,  $n \geq 0$ .
- (4)  $H h_n = n h_n$ ,  $n \geq 0$ .
- (5)  $\hat{h}_n = (-i)^n h_n$

Def.: Sei  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Dann heißt  $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle}$  2-Norm von  $f$ .

Satz: Die hermiteschen Funktionen  $h_n$ ,  $n \geq 0$ , bilden eine vollständige orthonormierte Folge in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , d.h. jede Funktion  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  hat die eindeutige Darstellung  $f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, h_n \rangle h_n$ . Die Folge  $\sum_{n=0}^{\infty} \langle f, h_n \rangle h_n$  konvergiert bezüglich der 2-Norm gegen  $f$ , das heißt, es gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \sum_{k=0}^n \langle f, h_k \rangle h_k\|_2 = 0$ . Für  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  folgt daraus:  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, h_n \rangle h_n(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , wobei die Konvergenz punktweise ist.

Parseval-Identität:  $\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, h_n \rangle|^2 \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Satz: (1)  $\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, h_n \rangle \langle g, h_n \rangle$ ,  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$   
 (2)  $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ ,  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$   
 (3)  $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \langle f, g \rangle$  (d.h.  $\wedge$  ist unitär),  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$   
 (4)  $\hat{\hat{f}} = f$ ,  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  } Plancherel-Formeln

Interpretation:  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  ist die direkte Summe der vier Eigenräume von  $\wedge$ . Die Fourier-Transformation  $\wedge$  setzt sich aus 4 Drehungen zusammen. ( $I \dots$  Identität)

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \begin{array}{c|c} \wedge = -iI & \wedge = I \\ \hline \wedge^{-1} = iI & \wedge^{-1} = -iI \end{array}$$

Satz (Heisenbergsche Unschärferelation):  $\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}} k^2 |\hat{f}(k)|^2 dk \geq \frac{1}{4} \|f\|_2^4$ ,  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

### Orthonormale Funktionensysteme - Differentialgleichungen

- Bsp.: ① Die hermiteschen Funktionen  $h_n$ ,  $n \geq 1$ , bilden eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}')$ .  $h_0$  ist eine Lösung der Dgl.  $\frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{dx^2} + x^2 - 1 \right) y = 0$ , wo  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} y(x) = 0$ . (Fourier-Transformation)
- ②  $e^{2\pi i n x}$ ,  $n = -\infty, \dots, +\infty$ , ist eine Orthonormalbasis von  $C^\infty(T')$ .  $e^{2\pi i n x}$  ist Lösung der Dgl.  $-y'' = 4\pi^2 n^2 y$ , wo  $y(x+1) = y(x)$  (Fourier-Reihen).
- ③ Die Dgl.  $-y'' = \lambda y$  mit den Randbedingungen  $y(0) = y(1) = 0$  besitzt genau dann eine Lösung, wenn  $\lambda = n^2 \pi^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Dann ist die normierte Lösung:  $g_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x$ . Inneres Produkt:  $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \bar{g}(x) dx$ . Die Funktionen  $g_n$ ,  $n \geq 1$ , bilden eine Orthonormalbasis des Raumes  $\mathcal{R} := \{f: [0,1] \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig diff'bar, } f(0) = f(1) = 0\}$ . Für  $f \in \mathcal{R}$  gilt:  $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, g_n \rangle g_n$ , wobei die Konvergenz punktweise ist.

Eine Verallgemeinerung der 3 obigen Fälle ist das Sturm-Liouville-Problem: Wir suchen Lösungen der Dgl.  $-y'' + q(x)y = \lambda y$  mit  $y(0) = y(1) = 0$ , wo  $q$  eine beliebige stetige Funktion ist.

Satz: Die Lösung des Anfangswertproblems  $-y'' + q(x)y = \lambda y$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$  ist:  $y_1(x, \lambda, q) = c_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x, \lambda, q)$ , wobei  $c_n(x, \lambda, q) = \int_0^x c_2(t_1) \prod_{i=1}^{n-1} s_2(t_{i+1} - t_i) q(t_i) dt_i$ ,  $s_2(x) := \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}$ ,  $c_2(x) := \cos \sqrt{\lambda} x$ .

Satz: Die Lösung des Anfangswertproblems  $-y'' + q(x)y = \lambda y$ ,  $y(0) = 0, y'(0) = 1$  ist:  $y_2(x, \lambda, q) = s_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n(x, \lambda, q)$ , wobei  $s_n(x, \lambda, q) = \int_0^x s_2(t_1) \prod_{i=1}^{n-1} s_2(t_{i+1} - t_i) q(t_i) dt_i$ .

Satz: Sei  $q$  eine reelle stetige Funktion von  $x$ ,  $x \in [0,1]$ . Dann sind die Eigenwerte  $\lambda$  des Sturm-Liouville-Problems (s.o.) reell.

Satz: Sei  $y_2(1, \lambda, q) = 0$ , d.h.  $\lambda$  ein Eigenwert des Sturm-Liouville-Problems ( $y_2$  vgl. vorherigen Satz). Dann gilt:  $\int_0^1 y_2^2(x, \lambda, q) dx = \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} y_2(1, \lambda, q) \right) \cdot y_2'(1, \lambda, q)$ . Insbesondere ist  $\frac{\partial}{\partial \lambda} y_2(1, \lambda, q) \neq 0$ , woraus folgt, daß alle Eigenwerte einfach sind.

Seien  $\mu_1(q) < \mu_2(q) < \dots$  die Nullstellen von  $y_2(1, \lambda, q)$ , d.h. die Eigenwerte des Sturm-Liouville-Problems.  $g_n(x) := \frac{y_2(x, \mu_n(q), q)}{\sqrt{\int_0^1 y_2^2(x) dx}}$ .

$\mu_n(q) = n^2 \pi^2 + \int_0^1 q(x) dx + r_n$ , wobei  $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 < \infty$ .

Satz:  $g_n$ ,  $n \geq 1$ , ist eine Orthonormalbasis des Funktionenraums  $\mathcal{R}$  (s.o. Bsp. ③).

Satz:  $g_n$ ,  $n \geq 1$ , besitzt genau  $n+1$  Nullstellen im Intervall  $[0,1]$ .

# Gruppendarstellungen

Def.:  $GL(n, \mathbb{C})$  : Gruppe der regulären komplexen  $n \times n$ -Matrizen.  
 $U(n)$  : Gruppe der unitären  $n \times n$ -Matrizen.  
 $SU(n)$  : Gruppe der unitären  $n \times n$ -Matrizen mit Determinante  $+1$ .  
 Speziell:  
 $SU(2) := \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, g^* = g^{-1}, \det g = 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$

Def.: Sei  $G$  eine Gruppe. Eine Darstellung der Gruppe  $G$  ist ein Homomorphismus  $\rho: G \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ , d.h.  $\rho(a)\rho(b) = \rho(ab)$ ,  $\rho(a^{-1}) = \rho(a)^{-1}$ ,  $\rho(e) = 1_{GL(n, \mathbb{C})}$  für alle  $a, b \in G$  ( $e$ : Einselement in  $G$ ). Dimension der Darstellung  $\rho$ :  $\dim \rho = n$ .  
 Eine unitäre Darstellung der Gruppe  $G$  ist ein Homomorphismus  $\rho: G \longrightarrow U(n)$ .  
 Eine unendlichdimensionale Darstellung von  $G$  ist ein Homomorphismus  $\rho: G \longrightarrow$  lineare invertierbare Operatoren auf einem unendlichdimensionalen komplexen Vektorraum.

Def.: Eine topologische Gruppe  $G$  ist eine Gruppe mit einer Topologie dargestellt, daß die Abbildungen  $G \times G \longrightarrow G, (a, b) \longmapsto ab$ ;  $G \longrightarrow G, a \longmapsto a^{-1}$  stetig sind.  
 Eine kompakte Gruppe ist eine kompakte topologische Gruppe.

In Folgenden bezeichnet  $G$  immer eine kompakte Gruppe.

Def.:  $C(G) / C_{\mathbb{R}}(G)$  bezeichnet die Menge der stetigen komplexen / reellen Funktionen auf  $G$ .  
 $\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in G} |f(x)|$  ( $< \infty$ ) definiert eine Norm auf  $C(G)$ .

Def.:  $L(a)f(x) := f(a^{-1}x)$ ,  $R(a)f(x) := f(xa)$ ,  $Jf(x) := f(x^{-1}) \quad \forall a \in G \quad \forall f \in C(G)$

P Für festes  $a \in G$  sind  $L(a), R(a), J$  lineare Abbildungen  $C(G) \longrightarrow C(G)$ .  $L, R$  sind unendlichdimensionale Darstellungen von  $G$ .  $\|L(a)f\|_{\infty} = \|R(a)f\|_{\infty} = \|Jf\|_{\infty} = \|f\|_{\infty} \quad \forall a \in G$   
 $L(ab) = L(a)L(b)$ ,  $R(ab) = R(a)R(b)$ ,  $JR(a) = L(a)J$ .

Def.: Sei  $G$  eine kompakte Gruppe. Ein Haarsches Integral ist eine stetige lineare Abbildung  $I: C(G) \longrightarrow \mathbb{C}$  mit den Eigenschaften  $I(1) = 1$ ,  $I(L(a)f) = I(f)$  für alle  $a \in G$ ;  $f \in C(G)$ .

Def.: Sei  $f \in C_{\mathbb{R}}(G)$ .  $\mathcal{L}_f := \{L(a)f \mid a \in G\}$ ,  $K(\mathcal{L}_f) := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i L(a_i)f \mid \sum \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\} \subset C_{\mathbb{R}}(G)$

P Für alle  $g \in K(\mathcal{L}_f)$  gilt:  $I(g) = I(f)$ .  $K(\mathcal{L}_f)$  ist als Untermenge von  $C_{\mathbb{R}}(G)$  kompakt.

Satz: Sei  $f \in C_{\mathbb{R}}(G)$ . Dann gilt es in  $K(\mathcal{L}_f)$  genau eine konstante Funktion  $c_f$ ; damit gilt:  $I(g) = c_f$  für alle  $g \in K(\mathcal{L}_f)$ .

Schreibweise:  $I(f) := \int_G f(x) dx$ ,  $f \in C_{\mathbb{R}}(G)$ . Für  $f \in C(G)$ ,  $f = u + iv$  definieren wir:  
 $I(f) := I(u) + i I(v)$ .  $\langle f, g \rangle := I(f \bar{g}) = \int_G f(x) \bar{g}(x) dx$  definiert ein inneres Produkt auf  $C(G)$ .

Bsp.: Die Gruppe  $T := \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$  ( $= U(1)$ ) ist kompakt. Man kann leicht verifizieren, daß für  $f \in C(T)$   $I(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta$  ein Haarsches Integral definiert.

Def.: Sei  $\rho: G \longrightarrow U(n)$  eine unitäre Darstellung. Ein Unterraum  $V \subseteq \mathbb{C}^n$  heißt invariant falls  $\rho(a)V \subset V$  für alle  $a \in G$ .

Def.: Eine Darstellung  $\rho$  heißt irreduzibel, wenn  $\rho$  außer  $\{0\}$  und  $\mathbb{C}^n$  keine invarianten Unterräume besitzt.

Bsp.:  $\rho_r: U(1) = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi]\} \longrightarrow U(2)$ ,  $e^{i\theta} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  ist eine unitäre Darstellung.  $\rho_r(e^{i\theta}) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ i e^{i\theta} \end{pmatrix} = e^{i\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \Rightarrow V := \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{C} \right\}$  ist ein invarianter Unterraum von  $\rho_r$ .

Def.: Seien  $\rho: G \longrightarrow U(n)$ ,  $\sigma: G \longrightarrow U(m)$  zwei unitäre Darstellungen der Gruppe  $G$ .  $\rho$  und  $\sigma$  heißen äquivalent, wenn  $m = n$  ist und es eine reguläre  $n \times n$ -Matrix  $T$  gibt so, daß  $T\rho(a)T^{-1} = \sigma(a)$  für alle  $a \in G$  gilt.

Lemma von Schur: Seien  $\rho$  und  $\sigma$  zwei irreduzible Darstellungen der Gruppe  $G$ ;  $T$  eine Matrix mit der Eigenschaft  $\rho(a)T = T\sigma(a)$  für alle  $a \in G$ . Dann ist  $T = 0$  oder  $\dim \rho = \dim \sigma$  und  $T$  ist regulär. Ist  $\sigma = \rho$ , dann folgt:  $T = \alpha 1$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

Satz: Seien  $\rho, \sigma$  zwei irreduzible, unitäre, nicht äquivalente Darstellungen der Gruppe  $G$ . Dann gilt:  $\langle \rho_{ij}, \sigma_{kl} \rangle = 0$ ,  $\langle \rho_{ij}, \rho_{kl} \rangle = \frac{1}{\dim \rho} \delta_{ij} \delta_{kl}$  (Elemente der Darstellungsmatrix!).

Satz (Peter-Weyl): Sei  $\{\rho^{\alpha}\}_{\alpha \in A}$  eine vollständige Liste der irreduziblen Darstellungen von  $G$ . Dann ist  $\{\dim \rho^{\alpha} \rho_{ij}^{\alpha} \mid \alpha \in A, 1 \leq i, j \leq \dim \rho^{\alpha}\}$  eine Orthonormalbasis für  $L^2(G)$ , die Vollständigkeit von  $C(G)$  bezüglich der Norm  $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ .

# Integraltafel

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)|, \quad \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}, \quad \int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a}$$

$$\int \sqrt{a^2+x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arsinh} \frac{x}{a}, \quad \int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arccosh} \frac{x}{a}, \quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \operatorname{arsinh} \frac{x}{a}, \quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \operatorname{arccosh} \frac{x}{a}$$

$$\int \tan x dx = -\log |\cos x|, \quad \int \cot x dx = \log |\sin x|, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \log \left| \tan \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x, \quad \int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}, \quad \int \sinh x dx = \cosh x, \quad \int \cosh x dx = \sinh x, \quad \int \tanh x dx = \log \cosh x$$

$$\int \sin^n ax dx = -\frac{1}{na} \sin^{n-1} ax \cos ax + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} ax dx, \quad \int \tan^n ax dx = \frac{1}{a(n-1)} \tan^{n-1} ax - \int \tan^{n-2} ax dx$$

$$\int \cos^n ax dx = \frac{1}{na} \cos^{n-1} ax \sin ax + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax dx$$

## Integration rationaler Funktionen:

I. Reduktion auf einen echten Bruch durch Abspalten eines Polynoms.

II. Partialbruchzerlegung: Das verbleibende Nennerpolynom zerfällt in reelle Linearfaktoren  $(x-\alpha)$  und quadratische Faktoren  $(x^2-2\beta x+\gamma)$  mit negativer Diskriminante  $(\beta^2-\gamma < 0)$ .

Dem Faktor  $(x-\alpha)^n$  des Nennerpolynoms entsprechen die Partialbrüche  $\frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-\alpha)^n}$ ,  
dem Faktor  $(x^2-2\beta x+\gamma)^m$  die Partialbrüche  $\frac{A_1 x + B_1}{(x^2-2\beta x+\gamma)} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2-2\beta x+\gamma)^2} + \dots + \frac{A_m x + B_m}{(x^2-2\beta x+\gamma)^m}$ .

III. Integration der Partialbrüche:  $\int \frac{A}{x-\alpha} dx = A \log |x-\alpha|$ ;  $\int \frac{A}{(x-\alpha)^n} dx = \frac{-A}{n-1} \cdot \frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}}, n > 1$

$$\int \frac{Bx+C}{x^2-2\beta x+\gamma} dx = \frac{B}{2} \log (x^2-2\beta x+\gamma) + (C+B\beta) \frac{1}{\sqrt{\gamma-\beta^2}} \operatorname{arctan} \frac{x-\beta}{\sqrt{\gamma-\beta^2}}, \quad \beta^2-\gamma < 0$$

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2-2\beta x+\gamma)^m} dx = \frac{B}{2} \frac{-1}{m-1} \frac{1}{(x^2-2\beta x+\gamma)^{m-1}} + (C+B\beta) I_m, \quad m > 1, \quad \text{wobei } I_1 = \frac{1}{\lambda} \operatorname{arctan} \frac{u}{\lambda}$$

$$I_{m+1} = \frac{1}{2m\lambda^2} \left( \frac{u}{(u^2+\lambda^2)^m} + (2m-1) \cdot I_m \right), \quad u := x-\beta, \quad \lambda := \sqrt{\gamma-\beta^2}$$

Integration rationaler Ausdrücke von  $\sin x, \cos x, \tan x$ : Die Substitution  $t = \tan \frac{x}{2}$ ,  
 $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ ,  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,  $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$  führt auf einen rationalen  
Ausdruck in  $t$ .

## Formeln

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \quad (x \in ]-1, 1])$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y, \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1, \quad \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}, \quad 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}, \quad \sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}, \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y, \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y, \quad \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a q^{k-1} = a \frac{1-q^{\infty}}{1-q} \quad (q \neq 1), \quad \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1), \quad \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i(\frac{\varphi}{n} + k \frac{2\pi}{n})} \quad (z = |z| e^{i\varphi}, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad n \in \mathbb{N})$$

$$\sqrt{\alpha + i\beta} = \pm \left( \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} + i \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} \right) \quad (\beta \neq 0)$$

# Sätze aus der Vektoranalysis

Im folgenden bedeuten  $\phi, \psi$  und  $\mathbf{A}$  stetig differenzierbare skalare bzw. vektorielle Funktionen.  $V$  ist ein dreidimensionales Volumen mit dem Volumenelement  $d^3x$ ,  $S$  eine zweidimensionale geschlossene Fläche, die  $V$  begrenzt, und  $da$  ist ein Flächenelement von  $S$ .  $\mathbf{n}$  bezeichnet die von  $da$  ausgehende äußere Flächennormale.

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d^3x = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} da \quad (\text{Gaußscher Satz})$$

$$\int_V \nabla \psi d^3x = \int_S \psi \mathbf{n} da \quad \int_V \nabla \times \mathbf{A} d^3x = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{A} da$$

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) d^3x = \int_S \phi \mathbf{n} \cdot \nabla \psi da \quad (\text{Erste Greensche Identität})$$

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d^3x = \int_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \mathbf{n} da \quad (\text{Greenscher Satz})$$

Im folgenden bedeutet  $S$  eine offene Fläche mit der Berandung  $C$  und dem Linienelement  $dl$ . Die Richtung der mit  $\mathbf{n}$  bezeichneten Flächennormalen von  $S$  ist, in Abhängigkeit von der Orientierung von  $C$ , durch die Rechte-Hand-Regel festgelegt.

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} da = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{Stokes'scher Satz})$$

$$\int_S \mathbf{n} \times \nabla \psi da = \oint_C \psi d\mathbf{l}$$

## Darstellung von Vektoroperationen in verschiedenen Koordinatensystemen

Bedeutet  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  orthogonale Einheitsvektoren in den unten spezifizierten Koordinatensystemen und  $A_1, A_2, A_3$  die entsprechenden Komponenten eines Vektors  $\mathbf{A}$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} \nabla \psi &= \mathbf{e}_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} && \text{Kartesische Koordinaten} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} && (x_1, x_2, x_3 = x, y, z) \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{e}_1 \left( \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) + \mathbf{e}_2 \left( \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) + \mathbf{e}_3 \left( \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) \\ \nabla^2 \psi &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \psi &= \mathbf{e}_1 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial \psi}{\partial z} && \text{Zylinderkoordinaten} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_1) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_2}{\partial \phi} + \frac{\partial A_3}{\partial z} && (\rho, \phi, z) \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{e}_1 \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_3}{\partial \phi} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_2 \left( \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial \rho} \right) + \mathbf{e}_3 \left( \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_2) - \frac{\partial A_1}{\partial \phi} \right) \\ \nabla^2 \psi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \psi &= \mathbf{e}_1 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \mathbf{e}_3 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} && \text{Kugelkoordinaten} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_1) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_2) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_3}{\partial \phi} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{e}_1 \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_3) - \frac{\partial A_2}{\partial \phi} \right] \\ &\quad + \mathbf{e}_2 \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_1}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_3) \right] + \mathbf{e}_3 \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_2) - \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \right] \\ \nabla^2 \psi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \end{aligned}$$

beachte die Identität  $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}$

|                       |
|-----------------------|
| Masse                 |
| Zeit                  |
| Frequenz              |
| Kraft                 |
| Arbeit                |
| Energie               |
| Leistung              |
| Ladung                |
| Ladungsdichte         |
| Stromstärke           |
| Stromdichte           |
| Elektr. Feldstärke    |
| Elektr. Potential     |
| Elektr. Spannung      |
| Polarisation          |
| Diel. Verschiebung    |
| Leitfähigkeit         |
| Widerstand            |
| Kapazität             |
| Magnetischer Fluß     |
| Magnetische Induktion |
| Magnet. Feldstärke    |
| Magnetisierung        |

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \\ \nabla \times \nabla \psi &= 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) &= 0 \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} \\ \nabla \cdot (\psi \mathbf{a}) &= \mathbf{a} \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \mathbf{a} \\ \nabla \times (\psi \mathbf{a}) &= \nabla \psi \times \mathbf{a} + \psi \nabla \times \mathbf{a} \\ \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \\ \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \\ \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{a} (\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b} (\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \quad \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ &= 2 \cos^2 \alpha - 1 = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \quad \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \\ \sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \\ 1 + \cos \alpha &= 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ \sin \alpha \pm \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

| Symbol         | Rationalisierte MKSA-Einheiten                                            | Gaußsche CGS-Einheiten                                        |
|----------------|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| Länge          | 1 Meter (m)                                                               | 10 <sup>9</sup> Zentimeter (cm)                               |
| m              | 1 Kilogramm (kg)                                                          | 10 <sup>3</sup> Gramm (g)                                     |
| t              | 1 Sekunde (s)                                                             | 1 Sekunde (s)                                                 |
| v              | 1 Hertz (Hz)                                                              | 1 Hertz (Hz)                                                  |
|                | 1 Newton (N)                                                              | 10 <sup>5</sup> dyn                                           |
| W }<br>U }     | 1 Joule (J)                                                               | 10 <sup>7</sup> erg                                           |
| P              | 1 Watt (W)                                                                | 10 <sup>7</sup> erg s <sup>-1</sup>                           |
| q              | 1 Coulomb =<br>1 Amperesekunde<br>(C = A s)                               | 3 × 10 <sup>9</sup> esE                                       |
| ρ              | 1 Coulomb/Meter <sup>3</sup><br>(C m <sup>-3</sup> )                      | 3 × 10 <sup>9</sup> esE cm <sup>-3</sup>                      |
| I              | 1 Ampere (A)                                                              | 3 × 10 <sup>9</sup> esE s <sup>-1</sup>                       |
| J              | 1 Ampere/Meter <sup>2</sup><br>(A m <sup>-2</sup> )                       | 3 × 10 <sup>9</sup> esE s <sup>-1</sup> cm <sup>-2</sup>      |
| E              | 1 Volt/Meter<br>(V m <sup>-1</sup> )                                      | 1/3 × 10 <sup>-4</sup> statvolt cm <sup>-1</sup><br>= dyn esE |
| Φ, V           | 1 Volt (V)                                                                | 1/300 statvolt<br>= erg esE                                   |
| P              | 1 Coulomb/Meter <sup>2</sup><br>(C m <sup>-2</sup> )                      | 3 × 10 <sup>9</sup> statvolt cm                               |
| D              | 1 Coulomb/Meter <sup>2</sup><br>(C m <sup>-2</sup> )                      | 12π × 10 <sup>9</sup> statvolt cm                             |
| σ              | 1 Siemens/Meter<br>(S m <sup>-1</sup> = Ω <sup>-1</sup> m <sup>-1</sup> ) | 9 × 10 <sup>9</sup> s <sup>-1</sup>                           |
| R              | 1 Ohm (Ω)                                                                 | 1/9 × 10 <sup>-11</sup> s cm <sup>-1</sup>                    |
| C              | 1 Farad<br>(F = A s <sup>-1</sup> V <sup>-1</sup> )                       | 9 × 10 <sup>11</sup> cm                                       |
| Φ <sub>m</sub> | 1 Weber (Wb)                                                              | 10 <sup>8</sup> Maxwell (Mx)                                  |
| B              | 1 Tesla<br>(T = Wb m <sup>-2</sup> )                                      | 10 <sup>8</sup> Gauß (G)                                      |
| H              | 1 Ampere/Meter<br>(A m <sup>-1</sup> )                                    | 4π × 10 <sup>-3</sup> Oersted (Oe)                            |
| M              | 1 Ampere/Meter<br>(A m <sup>-1</sup> )                                    | 10 <sup>-3</sup> Gauß (G)                                     |

| Einheitensystem                | ε <sub>0</sub>                     | μ <sub>0</sub>        | D, H                                                   | Makroskopische Maxwell'sche Gleichungen                                      | Lorentz-Kraft pro Einheitsladung |
|--------------------------------|------------------------------------|-----------------------|--------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| Gaußsche CGS-Einheiten         | 1                                  | 1                     | D = E + 4πP<br>H = B - 4πM                             | ∇ · D = 4πρ    ∇ × H = 4πJ + 1/c ∂D/∂t    ∇ × E + 1/c ∂B/∂t = 0    ∇ · B = 0 | E + v × B                        |
| Rationalisierte MKSA-Einheiten | 10 <sup>-9</sup> /4πϵ <sub>0</sub> | 4π × 10 <sup>-7</sup> | D = ε <sub>0</sub> E + P<br>H = 1/μ <sub>0</sub> B - M | ∇ · D = ρ    ∇ × H = J + ∂D/∂t    ∇ × E + ∂B/∂t = 0    ∇ · B = 0             | E + v × B                        |

# Tabelle physikalischer Konstanten

| Größe                         | Symbol           | Wert                                      | CGS                         | SI                      |
|-------------------------------|------------------|-------------------------------------------|-----------------------------|-------------------------|
| Lichtgeschwindigkeit          | $c$              | 2,997925                                  | $10^{10} \text{ cm s}^{-1}$ | $10^8 \text{ m s}^{-1}$ |
| Ladung des Protons            | $e$              | 1,60219                                   | —                           | $10^{-19} \text{ C}$    |
| Plancksches Wirkungsquantum   | $h$              | 4,80325                                   | $10^{-10} \text{ esu}$      | —                       |
|                               | $\hbar = h/2\pi$ | 6,62620                                   | $10^{-27} \text{ erg s}$    | $10^{-34} \text{ J s}$  |
|                               |                  | 1,05459                                   | $10^{-27} \text{ erg s}$    | $10^{-34} \text{ J s}$  |
| Loschmidt- oder Avogadro-Zahl | $N$              | $6,02217 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ | —                           | —                       |
| Atomare Masseneinheit         | AME              | 1,66053                                   | $10^{-24} \text{ g}$        | $10^{-27} \text{ kg}$   |
| Ruhemasse des Elektrons       | $m$              | 9,10956                                   | $10^{-28} \text{ g}$        | $10^{-31} \text{ kg}$   |
| Ruhemasse des Protons         | $M_p$            | 1,67261                                   | $10^{-24} \text{ g}$        | $10^{-27} \text{ kg}$   |
| Protonenmasse / Elektronmasse | $M_p/m$          | 1836,1                                    | —                           | —                       |

|                                  |                       |                                     |                               |                             |
|----------------------------------|-----------------------|-------------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| Reziproke Feinstrukturkonstante  | $1/\alpha$            | 137,036                             | —                             | —                           |
| Elektronenradius                 | $r_e$                 | 2,81794                             | $10^{-13} \text{ cm}$         | $10^{-15} \text{ m}$        |
| Comptonwellenlänge des Elektrons | $\lambda_c$           | 3,86159                             | $10^{-11} \text{ cm}$         | $10^{-13} \text{ m}$        |
| Bohrscher Radius                 | $r_0$                 | 5,29177                             | $10^{-9} \text{ cm}$          | $10^{-11} \text{ m}$        |
| Bohrscher Magneton               | $\mu_B$               | 9,27410                             | $10^{-21} \text{ erg G}^{-1}$ | $10^{-24} \text{ J T}^{-1}$ |
| Rydbergkonstante                 | $R_\infty$ oder $R_y$ | 2,17991                             | $10^{-11} \text{ erg}$        | $10^{-18} \text{ J}$        |
|                                  | $me^4/2\hbar^2$       | 13,6058 eV                          | —                             | —                           |
| 1 Elektronenvolt                 | eV                    | 1,60219                             | $10^{-12} \text{ erg}$        | $10^{-19} \text{ J}$        |
|                                  | eV/h                  | $2,41797 \times 10^{14} \text{ Hz}$ | —                             | —                           |
|                                  | eV/hc                 | 8,06546                             | $10^3 \text{ cm}^{-1}$        | $10^5 \text{ m}^{-1}$       |
|                                  | eV/k <sub>B</sub>     | $1,16048 \times 10^4 \text{ K}$     | —                             | —                           |
| Boltzmannkonstante               | $k_B$                 | 1,38062                             | $10^{-16} \text{ erg K}^{-1}$ | $10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ |
| Influenzkonstante                | $\epsilon_0$          | —                                   | 1                             | $10^7/4\pi \text{ cm}^{-2}$ |
| Induktionskonstante              | $\mu_0$               | —                                   | 1                             | $4\pi \times 10^{-7}$       |

Quelle: B. N. Taylor, W. H. Parker und D. N. Langenberg, Rev. Mod. Phys. 41, 375 (1969). Siehe auch E. R. Cohen und B. N. Taylor Journal of Physical and Chemical Reference Data 2 (4), 663 (1973).

$$\int (ax+b)^r dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b|$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctan \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} & \text{für } D < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{D}} \ln \left| \frac{2ax+b-\sqrt{D}}{2ax+b+\sqrt{D}} \right| & \text{für } D > 0 \end{cases} \quad D := b^2 - 4ac$$

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{2a} \ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$$

$$\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n} dx = \frac{1}{(n-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2a(n-3)}{(n-1)} \int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} dx \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, D < 0)$$

$$\int \frac{x}{(ax^2+bx+c)^n} dx = \frac{bx+2c}{D(n-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{b(2n-3)}{D(n-1)} \int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} dx \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, D < 0)$$

Unbestimmte Integrale rationaler Funktionen ( $a \neq 0$ )

$$\int (ax+b)^r dx = \frac{1}{a(r+1)} (ax+b)^{r+1} \quad (r \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arcsin} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} & \text{für } D < 0, a > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \ln|2\sqrt{a(ax^2+bx+c)} + 2ax+b| & \text{für } D = 0, a > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arcsin} \frac{2ax+b}{\sqrt{D}} & \text{für } D > 0, a < 0 \end{cases}$$

$$\int \frac{a_0+a_1x+\dots+a_nx^n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = (b_0+b_1x+\dots+b_{n-1}x^{n-1}) \sqrt{ax^2+bx+c} + b_n \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

Im konkreten Fall kann man zu den vorgegebenen  $a_0, a_1, \dots, a_n$  die  $b_0, b_1, \dots, b_n$  aus der Gleichung  $\frac{a_0+a_1x+\dots+a_nx^n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{d}{dx} \left[ (b_0+b_1x+\dots+b_{n-1}x^{n-1}) \sqrt{ax^2+bx+c} \right] + \frac{b_n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$  durch Koeffizientenvergleich bestimmen.

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{2ax+b}{4a} \sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{\sqrt{-D}}{8a} \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} \quad \int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \operatorname{arsinh} \frac{x}{a} \quad \int \sqrt{a^2+x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arsinh} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \operatorname{arcosh} \frac{x}{a} \quad \int \sqrt{x^2-a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcosh} \frac{x}{a}$$

$$\int x \sqrt{a^2 \pm x^2} dx = \pm \frac{1}{3} \sqrt{(a^2 \pm x^2)^3} \quad \int \frac{1}{x \sqrt{a^2 \pm x^2}} dx = \sqrt{a^2 \pm x^2} - a \ln \left| \frac{1}{a} \left( a + \sqrt{a^2 \pm x^2} \right) \right|$$

$$\int x \sqrt{x^2-a^2} dx = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2-a^2)^3} \quad \int \frac{1}{x \sqrt{x^2-a^2}} dx = \sqrt{x^2-a^2} - a \operatorname{arccos} \frac{a}{x}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = -\sqrt{a^2-x^2} \quad \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = -\frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \sqrt{a^2+x^2} \quad \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arsinh} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \sqrt{x^2-a^2} \quad \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcosh} \frac{x}{a}$$

Unbestimmte Integrale spezieller algebraischer Funktionen ( $a \neq 0$ )

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$\int \frac{e^{ax}}{x} dx = \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n \cdot n!}$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$$

$$\int g(x) \cdot e^{ax} dx = \frac{1}{a} g(x) e^{ax} - \frac{1}{a} \int g'(x) e^{ax} dx \quad (g \text{ ganzrationale Funktion})$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x \quad (x > 0) \quad \int \frac{1}{\ln x} dx = \ln|\ln x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n \cdot n!} \quad (x > 0)$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \ln|\ln x| \quad (x > 0) \quad \int \frac{(\ln x)^n}{x} dx = \frac{1}{n+1} (\ln x)^{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, x > 0)$$

$$\int \frac{x^m}{\ln x} dx = \ln|\ln x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m+1)^n (\ln x)^n}{n \cdot n!} \quad (m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, x > 0)$$

$$\int x^m (\ln x)^n dx = \frac{x^{m+1} (\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^{m+1} (\ln x)^{n-1} dx \quad (m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, x > 0)$$

$$\int e^{ax} \ln x dx = \frac{1}{a} e^{ax} \ln|x| - \frac{1}{a} \int \frac{e^{ax}}{x} dx \quad \int \sin x dx = -\frac{1}{a} \cos ax$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax \quad \int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln|\cos ax| \quad \int \cot ax dx = \frac{1}{a} \ln|\sin ax|$$

$$\int \frac{1}{\sin ax} dx = \frac{1}{a} \ln \left| \tan \frac{ax}{2} \right| \quad \int \frac{1}{\cos ax} dx = \frac{1}{a} \ln \left| \tan \left( \frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

$$\int \sin^2 ax dx = -\frac{1}{2a} \sin^2 ax \cos ax + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} ax dx \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1\})$$

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{1}{2a} \cos^2 ax \sin ax + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax dx \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1\})$$

$$\int \tan^n ax dx = \frac{1}{a(n-1)} \tan^{n-1} ax - \int \tan^{n-2} ax dx \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\})$$

$$\int \cot^n ax dx = -\frac{1}{a(n-1)} \cot^{n-1} ax - \int \cot^{n-2} ax dx \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\})$$

$$\int \frac{\sin ax}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (ax)^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} \quad \int \frac{\cos ax}{x} dx = \ln|ax| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (ax)^{2n}}{2n(2n)!}$$

$$\int x^n \sin ax dx = -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax dx \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$$

$$\int x^n \cos ax dx = \frac{1}{a} x^n \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax dx \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$$

$$\int \frac{1}{1+\sin ax} dx = \frac{1}{a} \tan \left( \frac{ax}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \quad \int \frac{1}{1-\sin ax} dx = \frac{1}{a} \tan \left( \frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\int \frac{1}{1+\cos ax} dx = \frac{1}{a} \tan \frac{ax}{2} \quad \int \frac{1}{1-\cos ax} dx = -\frac{1}{a} \cot \frac{ax}{2}$$

$$\int \sinh ax dx = \frac{1}{a} \cosh ax \quad \int \cosh ax dx = \frac{1}{a} \sinh ax$$

$$\int \tanh ax dx = \frac{1}{a} \ln|\cosh ax| \quad \int \coth ax dx = \frac{1}{a} \ln|\sinh ax|$$

$$\int \arcsin \frac{x}{a} dx = x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} \quad \int \arccos \frac{x}{a} dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2}$$

$$\int \arctan \frac{x}{a} dx = x \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(x^2+a^2) \quad \int \operatorname{arccot} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arccot} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(x^2+a^2)$$

$$\int \operatorname{arsinh} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arsinh} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2+a^2} \quad \int \operatorname{arcosh} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arcosh} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2-a^2}$$

$$\int \operatorname{artanh} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{artanh} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(a^2-x^2) \quad \int \operatorname{arcoth} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arcoth} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(x^2-a^2)$$

Unbestimmte Integrale spezieller transzendenter Funktionen.

# Legendresche Polynome und Funktionen

## Definitionen:

Legendresches Polynom  $P_l$  ( $l = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ):

$$P_l(u) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{du^l} (u^2 - 1)^l. \quad (\text{B.71})$$

$P_l$  ist ein Polynom vom Grade  $l$ , der Parität  $(-)^l$  und besitzt im Intervall  $(-1, +1)$   $l$  Nullstellen.

Legendresche Funktion  $P_l^m$  ( $l = 0, 1, 2, \dots, +\infty$ ;  $m = 0, 1, 2, \dots, l$ ):

$$\begin{aligned} P_l^m(u) &= (1 - u^2)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^m}{du^m} P_l(u) \\ &= \frac{(1 - u^2)^{\frac{1}{2}m}}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{du^{l+m}} (u^2 - 1)^l. \end{aligned} \quad (-1 \leq u \leq 1) \quad (\text{B.72})$$

$P_l^m(u)$  ist das Produkt von  $(1 - u^2)^{\frac{1}{2}m}$  mit einem Polynom vom Grade  $(l - m)$  und der Parität  $(-)^{l-m}$ , das im Intervall  $(-1, +1)$   $(l - m)$  Nullstellen aufweist. Speziell ist:

$$\begin{aligned} m = l \quad P_l^l &= (2l - 1)!! (1 - u^2)^{\frac{1}{2}l} \\ m = 0 \quad P_l^0 &= P_l(u). \end{aligned} \quad (\text{B.73})$$

$P_l(u)$  ist eine spezielle Legendresche Funktion.

## Differentialgleichungen:

$$\left[ (1 - u^2) \frac{d^2}{du^2} - 2u \frac{d}{du} + l(l + 1) - \frac{m^2}{1 - u^2} \right] P_l^m = 0. \quad (\text{B.74})$$

## Erzeugende Funktionen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - 2tu + t^2}} &= \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(u) \quad (|t| < 1) \quad (\text{B.75}) \\ (2m - 1)!! (1 - u^2)^{\frac{1}{2}m} \frac{t^m}{[1 - 2tu + t^2]^{m+\frac{1}{2}}} &= \sum_{l=m}^{\infty} t^l P_l^m(u). \end{aligned} \quad (\text{B.76})$$

## Orthonormierungsbedingungen:

$$\int_{-1}^{+1} P_k^m P_l^m du = \frac{2}{2l + 1} \frac{(l + m)!}{(l - m)!} \delta_{kl}. \quad (\text{B.77})$$

## Rekursionsformeln:

$$\begin{aligned} (2l + 1)u P_l^m &= (l + 1 - m) P_{l+1}^m + (l + m) P_{l-1}^m \quad (\text{B.78}) \\ (1 - u^2) \frac{d}{du} P_l^m &= -lu P_l^m + (l + m) P_{l-1}^m \quad (\text{B.79}) \\ &= (l + 1)u P_l^m - (l + 1 - m) P_{l+1}^m \quad (\text{B.80}) \end{aligned}$$

(Beziehungen auch für  $l = 0$  gültig, mit der Setzung  $P_{-1} = 0$ ).

## Besondere Werte:

$$\begin{aligned} P_l(1) &= 1, \quad P_l(-1) = (-)^l \\ \text{wenn } m \neq 0, \quad P_l^m(1) &= P_l^m(-1) = 0 \\ P_l^m(0) &= \begin{cases} (-)^n \frac{(2p + 2m)!}{2^l p! (p + m)!} & \text{wenn } l - m = 2p \\ 0 & \text{wenn } l - m = 2p + 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.81})$$

## Tabelle der ersten 5 Legendreschen Polynome:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, & P_1 &= u & P_2 &= \frac{1}{2}(3u^2 - 1), \\ P_1 &= \frac{1}{2}(5u^3 - 3u) & P_3 &= \frac{1}{2}(35u^4 - 30u^2 + 3). \end{aligned}$$

# Kugelfunktionen

Die Operatoren  $L_x, L_y, L_z$  hermitesche Differentialoperatoren, definiert durch ( $\hbar = 1$ ):

$$L \equiv \frac{1}{i} (\mathbf{r} \times \nabla).$$

Man wählt  $Oz$  als Polarachse; ( $r, \theta, \varphi$ ) sphärische Polarkoordinaten von  $r$ ;  $\Omega \equiv (\theta, \varphi)$  die beiden Winkelkoordinaten ( $\varphi = 0$   $xz$ -Ebene,  $\varphi = \pi/2$   $yz$ -Ebene). Raumwinkelement:

$$d\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

In sphärischen Polarkoordinaten:

$$L_z = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (\text{B.82})$$

$$L_{\pm} \equiv L_x \pm iL_y = e^{\pm i\varphi} \left[ \pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \quad (\text{B.83})$$

$$L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = - \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad (\text{B.84})$$

Definition der Kugelfunktionen (genauer: Kugelflächenfunktionen)  $Y_l^m(\theta, \varphi)$ :

Gemeinsame Eigenfunktionen der Operatoren  $L^2$  und  $L_z$

$$L^2 Y_l^m = l(l + 1) Y_l^m \quad (\text{B.85})$$

$$\begin{aligned} L_z Y_l^m &= m Y_l^m \\ (l &= 0, 1, 2, \dots, \infty; \quad m = -l, -l + 1, \dots, l). \end{aligned} \quad (\text{B.86})$$

Ihre Definition wird durch folgende Vereinbarungen vervollständigt:

- (i) Die  $Y_l^m$  sind auf der Einheitskugel auf Eins normiert;
- (ii) ihre Phasen werden so gewählt, daß die Rekursionsformeln (B.89) erfüllt sind und  $Y_l^m(0, 0)$  reell und positiv wird.

## Orthonormierungsbedingungen und Vollständigkeitsrelation:

$$\int Y_l^m Y_{l'}^{m'} d\Omega \equiv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \, Y_l^m Y_{l'}^{m'}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (\text{B.87})$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} Y_l^m(\theta, \varphi) Y_l^m(\theta', \varphi') = \frac{\delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi')}{\sin \theta} \equiv \delta(\Omega - \Omega'). \quad (\text{B.88})$$

Die  $Y_l^m$  bilden auf der Einheitskugel ein vollständiges Orthonormalsystem von quadratintegrablen Funktionen.

## Rekursionsformeln:

$$\begin{aligned} L_{\pm} Y_l^m &= [(l + 1) - m(m \pm 1)]^{\frac{1}{2}} Y_{l+1}^{m \pm 1} \\ &= [(l \mp m)(l + 1 \pm m)]^{\frac{1}{2}} Y_l^{m \pm 1} \end{aligned} \quad (\text{B.89})$$

$$\cos \theta \, Y_l^m = \left[ \frac{(l + 1 + m)(l + 1 - m)}{(2l + 1)(2l + 3)} \right]^{\frac{1}{2}} Y_{l+1}^m + \left[ \frac{(l + m)(l - m)}{(2l + 1)(2l - 1)} \right]^{\frac{1}{2}} Y_{l-1}^m. \quad (\text{B.90})$$

## Parität $(-)^l$ :

Bei einer Raumpiegelung  $(\theta, \varphi) \rightarrow (\pi - \theta, \varphi + \pi)$ :

$$Y_l^m(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-)^l Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (\text{B.91})$$

## Komplex-Konjugation:

$$Y_l^{m*}(\theta, \varphi) = (-)^m Y_l^{-m}(\theta, \varphi). \quad (\text{B.92})$$

Zusammenhang mit den Legendreschen Funktionen ( $m > 0$ ):

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \left[ \frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (\text{B.93})$$

$Y_l^m$  ist das Produkt von  $e^{im\varphi} \sin^m \theta$  mit einer Polynom in  $\cos \theta$  vom Grade  $(l-m)$  und der Parität  $(-1)^l - m$ . Speziell ist

$$m = 0 \quad Y_l^0 = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \quad (\text{B.94})$$

$$m = l \quad Y_l^l = (-1)^l \left[ \frac{(2l+1)(2l)!}{4\pi 2^l (l!)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \sin^l \theta e^{il\varphi}. \quad (\text{B.95})$$

### Räumliche Kugelfunktionen und Kugelflächenfunktionen

Die  $(2l+1)$  in  $x, y, z$  homogenen Polynome vom Grade  $l$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_l^m(\mathbf{r}) &\equiv r^l Y_l^m(\theta, \varphi) \\ (m &= -l, -l+1, \dots, +l) \end{aligned} \quad (\text{B.96})$$

bilden eine Folge von  $(2l+1)$  linear unabhängigen räumlichen Kugelfunktionen vom Grade  $l$ <sup>\*)</sup>:

$$\Delta \mathcal{Y}_l^m(\mathbf{r}) = 0. \quad (\text{B.97})$$

Tabelle der ersten Kugelfunktionen:

$$\begin{aligned} l=0 \quad Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ l=1 \quad \begin{cases} Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi} \\ Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\ Y_{12} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi} \end{cases} \quad l=3 \quad \begin{cases} Y_{33} = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{35}{4\pi}} \sin^3 \theta e^{3i\varphi} \\ Y_{32} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{105}{2\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta e^{2i\varphi} \\ Y_{31} = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{21}{4\pi}} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{i\varphi} \\ Y_{30} = \sqrt{\frac{7}{4\pi}} (\frac{3}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta) \end{cases} \\ l=2 \quad \begin{cases} Y_{22} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi} \\ Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi} \\ Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}) \end{cases} \end{aligned}$$

Additionstheorem:

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi)$$

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$$

Entwicklung einer beliebigen Funktion  $g(\theta, \varphi)$  nach Kugelfunktionen:

$$g(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad A_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \varphi) g(\theta, \varphi)$$

\*) Gleichung (B.97) ergibt sich aus der für jede im Ursprung endliche Funktion geltenden Operatoridentität

$$\Delta \equiv \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{L^2}{r^2}$$

Nach Definition ist  $h(x, y, z)$  eine räumliche Kugelfunktion, wenn sie in  $x, y, z$  homogen ist und der Gleichung  $\Delta h = 0$  genügt. Es gibt  $(2l+1)$  linear unabhängige räumliche Kugelfunktionen vom Grade  $l$  (harmonische Funktionen).

## Eigenfunktionen von wasserstoffartigen Atomen

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{Z} &= \frac{\hbar^2}{Zm_e e^2} \quad \text{reduzierte Masse des Elektrons} \quad \text{Energieeigenwerte:} \quad E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{Z^2 e^2}{2a_0} \\ \psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) &= R_{nl}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad n = 1, 2, \dots; \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-1; \quad m = -l, -l+1, \dots, +l \\ R_{n1}(r) &= \frac{2}{n} \sqrt{\frac{(n-1-1)!}{(n+1)!}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} e^{-Zr/na_0} \left( \frac{Zr}{na_0} \right)^{n-1-1} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(n-1-k)! (2l+1+k)!} \left( \frac{Zr}{na_0} \right)^k \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{n} \sqrt{\frac{(n-1-1)!}{(n+1)!}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} e^{-Zr/na_0} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^{j-1}}{(n-1-j)! (1+1+j)!} \left( \frac{Zr}{na_0} \right)^j$$

$$\begin{aligned} \psi_{100} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} e^{-Zr/a_0} & \psi_{310} &= \frac{\sqrt{2}}{81 \sqrt{\pi}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \left( 6 - \frac{Zr}{a_0} \right) \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/3a_0} \cos \vartheta \\ \psi_{200} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \left( 2 - \frac{Zr}{a_0} \right) e^{-Zr/2a_0} & \psi_{31\pm 1} &= \frac{1}{81 \sqrt{\pi}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \left( 6 - \frac{Zr}{a_0} \right) \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/3a_0} \sin \vartheta e^{\pm i\varphi} \\ \psi_{210} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/2a_0} \cos \vartheta & \psi_{320} &= \frac{1}{81 \sqrt{6\pi}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \frac{Z^2 r^2}{a_0^2} e^{-Zr/3a_0} (3 \cos^2 \vartheta - 1) \\ \psi_{21\pm 1} &= \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/2a_0} \sin \vartheta e^{\pm i\varphi} & \psi_{32\pm 1} &= \frac{1}{81 \sqrt{\pi}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \frac{Z^2 r^2}{a_0^2} e^{-Zr/3a_0} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{\pm i\varphi} \\ \psi_{300} &= \frac{1}{81 \sqrt{3\pi}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \left( 27 - 18 \frac{Zr}{a_0} + 2 \frac{Z^2 r^2}{a_0^2} \right) e^{-Zr/3a_0} & \psi_{32\pm 2} &= \frac{1}{162 \sqrt{\pi}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \frac{Z^2 r^2}{a_0^2} e^{-Zr/3a_0} \sin^2 \vartheta e^{\pm 2i\varphi} \end{aligned}$$

## Hermite'sche Polynome

Definition:  $H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \left( \frac{d}{dz} \right)^n e^{-z^2}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ )

$H_n$  ist ein Polynom vom Grade  $n$ , der Parität  $(-1)^n$  und besitzt  $n$  Nullstellen,

$$H_n(z) = \begin{cases} (-1)^p \frac{(2p)!}{p!} F(-p | \frac{1}{2} | z^2) & \text{wenn } n = 2p \\ (-1)^p 2 \frac{(2p+1)!}{p!} z F(-p | \frac{3}{2} | z^2) & \text{wenn } n = 2p+1. \end{cases}$$

Differentialgleichung:

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} - 2z \frac{d}{dz} + 2n \right] H_n(z) = 0.$$

Rekursionsformeln:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} H_n &= 2n H_{n-1} \\ \left( 2z - \frac{d}{dz} \right) H_n &= H_{n+1} \end{aligned}$$

$$2z H_n = H_{n+1} + 2n H_{n-1}.$$

Erzeugende Funktion:

$$\exp(-s^2 + 2sz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} H_n(z).$$

Tabelle der ersten 6 Hermite'schen Polynome:

$$\begin{aligned} H_0 &= 1, & H_1 &= 2z \\ H_2 &= 4z^2 - 1, & H_3 &= 8z^3 - 12z, \\ H_4 &= 16z^4 - 48z^2 + 12, & H_5 &= 32z^5 - 160z^3 + 120z. \end{aligned}$$

## Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators

$$\begin{aligned} u_n &= (\sqrt{\pi} 2^n n!)^{-1/2} e^{-1/2 Q^2} H_n(Q) \quad (Q = (m\omega/\hbar)^{1/2} q) & \text{Parität } (-1)^n: & u_n(-Q) = (-1)^n u_n(Q) \\ u_n(Q) &\text{ ist eine auf Eins normierte Eigenfunktion zum Eigenwert } E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega \quad (n = 0, 1, \dots, \infty). \end{aligned}$$

# Spherical Bessel Functions

Let us consider the differential equation (4.20), namely

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{d}{dz} + \left( 1 - \frac{l(l+1)}{z^2} \right) \right] f_l = 0 \quad (\text{C.1})$$

with  $l = 0, 1, 2, \dots$ . Particular solutions of this equation are:

i) The (genuine) *spherical Bessel functions* (or spherical Bessel functions of the first kind)

$$j_l(z) = \left( \frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} J_{l+1/2}(z) \quad (\text{C.2})$$

where  $J_\nu(z)$  is an ordinary Bessel function of order  $\nu$ . The functions  $j_l(z)$  are *regular* at the origin [see eq. (C.11a)].

ii) The *spherical Neumann functions*

$$n_l(z) = (-1)^{l+1} \left( \frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} J_{-l-1/2}(z) \quad (\text{C.3})$$

which are *irregular* solutions of eq. (C.1)

iii) The *spherical Hankel functions* of the first and second kind

$$h_l^{(1)}(z) = j_l(z) + in_l(z) \quad (\text{C.4})$$

and

$$h_l^{(2)}(z) = j_l(z) - in_l(z) \quad (\text{C.5})$$

which are *irregular* solutions of eq. (C.1). Thus

$$j_l(z) = \frac{1}{2} [h_l^{(1)}(z) + h_l^{(2)}(z)] \quad (\text{C.6})$$

and

$$n_l(z) = \frac{1}{2i} [h_l^{(1)}(z) - h_l^{(2)}(z)]. \quad (\text{C.7})$$

The pairs  $\{j_l(z), n_l(z)\}$  and  $\{h_l^{(1)}(z), h_l^{(2)}(z)\}$  are linearly independent solutions of eq. (C.1) for every  $l$ .

The first three functions  $j_l$  and  $n_l$  are given explicitly by

$$\begin{aligned} j_0(z) &= \frac{\sin z}{z}, \\ j_1(z) &= \frac{\sin z}{z^2} - \frac{\cos z}{z}, \\ j_2(z) &= \left( \frac{3}{z^3} - \frac{1}{z} \right) \sin z - \frac{3}{z^2} \cos z \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

and

$$\begin{aligned} n_0(z) &= -\frac{\cos z}{z}, \\ n_1(z) &= -\frac{\cos z}{z^2} - \frac{\sin z}{z}, \\ n_2(z) &= -\left( \frac{3}{z^3} - \frac{1}{z} \right) \cos z - \frac{3}{z^2} \sin z. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

The functions  $j_0(x), j_1(x), j_2(x)$  and  $n_0(x), n_1(x), n_2(x)$ , where  $x$  is real, are plotted in Figs. C.1 and C.2.

The functions  $j_l(z)$  and  $n_l(z)$  may be represented by the ascending series [1-3]

$$j_l(z) = \frac{z^l}{(2l+1)!} \left[ 1 - \frac{\frac{1}{2}z^2}{1!(2l+3)} + \frac{(\frac{1}{2}z^2)^2}{2!(2l+3)(2l+5)} - \dots \right] \quad (\text{C.10a})$$

$$n_l(z) = -\frac{(2l-1)!}{z^{l+1}} \left[ 1 - \frac{\frac{1}{2}z^2}{1!(1-2l)} + \frac{(\frac{1}{2}z^2)^2}{2!(1-2l)(3-2l)} - \dots \right] \quad (\text{C.10b})$$

where

$$(2l+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2l+1).$$

We see from eqs. (C.10) that for  $z \rightarrow 0$  one has

$$z^{-l} j_l(z) \rightarrow \frac{1}{z \rightarrow 0} \frac{1}{(2l+1)!}; \quad j_l(z) \sim \frac{z^l}{(2l+1)!}, \quad (\text{C.11a})$$

$$z^{l+1} n_l(z) \rightarrow \frac{1}{z \rightarrow 0} \frac{-(2l-1)!}{1}; \quad n_l(z) \sim -\frac{(2l-1)!}{z^{l+1}}. \quad (\text{C.11b})$$

For real  $x$  somewhat larger than  $l(l+1)$  one may use the asymptotic formulae

$$j_l(x) \rightarrow \frac{1}{x} \sin(x - \frac{1}{2}l\pi), \quad (\text{C.12a})$$

$$n_l(x) \rightarrow -\frac{1}{x} \cos(x - \frac{1}{2}l\pi), \quad (\text{C.12b})$$

$$h_l^{(1)}(x) \rightarrow -i \frac{\exp[i(x - \frac{1}{2}l\pi)]}{x}, \quad (\text{C.12c})$$

$$h_l^{(2)}(x) \rightarrow i \frac{\exp[-i(x - \frac{1}{2}l\pi)]}{x}. \quad (\text{C.12d})$$

Some important properties of the spherical Bessel functions  $f_l$  [with  $f_l = j_l, n_l, h_l^{(1)}, h_l^{(2)}$ ] are the recurrence relations (we assume that  $l > 0$ )

$$f_{l-1}(z) + f_{l+1}(z) = \frac{2l+1}{z} f_l(z), \quad (\text{C.13a})$$

$$\frac{d}{dz} f_l(z) = \frac{1}{2l+1} [l f_{l-1}(z) - (l+1) f_{l+1}(z)] \quad (\text{C.13b})$$

$$f_{l-1}(z) = \frac{l+1}{z} f_l(z) + \frac{d}{dz} f_l(z) \quad (\text{C.13c})$$

$$f_{l+1}(z) = \frac{l}{z} f_l(z) - \frac{d}{dz} f_l(z). \quad (\text{C.13d})$$

One also has the differentiation formulae

$$\frac{d}{dz} [z^{l+1} f_l(z)] = z^{l+1} f_{l-1}(z), \quad (\text{C.14a})$$

$$\frac{d}{dz} [z^{-l} f_l(z)] = -z^{-l} f_{l+1}(z) \quad (\text{C.14b})$$

and the analytic continuations (with  $l, m = 0, 1, 2, \dots$ )

$$j_l(z e^{m\pi i}) = e^{ml\pi i} j_l(z), \quad (\text{C.15a})$$

$$n_l(z e^{m\pi i}) = (-1)^m e^{ml\pi i} n_l(z), \quad (\text{C.15b})$$

$$h_l^{(1)}(z e^{2m+1\pi i}) = (-1)^l h_l^{(2)}(z), \quad (\text{C.15c})$$

$$h_l^{(2)}(z e^{2m+1\pi i}) = (-1)^l h_l^{(1)}(z), \quad (\text{C.15d})$$

$$h_l^{(k)}(z e^{2m\pi i}) = h_l^{(k)}(z), \quad k = 1, 2. \quad (\text{C.15e})$$

In particular, we see that

$$j_l(-z) = (-1)^l j_l(z), \quad (\text{C.16a})$$

$$n_l(-z) = (-1)^{l+1} n_l(z), \quad (\text{C.16b})$$

$$h_l^{(1)}(-z) = (-1)^l h_l^{(2)}(z), \quad (\text{C.16c})$$

$$h_l^{(2)}(-z) = (-1)^l h_l^{(1)}(z). \quad (\text{C.16d})$$

Additional useful properties of the functions  $j_l$  and  $n_l$  are

$$j_l(z) n_{l-1}(z) - j_{l-1}(z) n_l(z) = z^{-2}, \quad l > 0 \quad (\text{C.17a})$$

$$j_l(z) \frac{d}{dz} n_l(z) - n_l(z) \frac{d}{dz} j_l(z) = z^{-2} \quad (\text{C.17b})$$

$$\int j_0'(x) x^2 dx = \frac{1}{2} x^3 [j_0'(x) + n_0(x) j_1(x)] \quad (\text{C.17c})$$

$$\int n_0^2(x) x^2 dx = \frac{1}{2} x^3 [n_0^2(x) - j_0(x) n_1(x)] \quad (\text{C.17d})$$

$$\int j_1(x) dx = -j_0(x) \quad (\text{C.17e})$$

$$\int j_0(x) x^2 dx = x^2 j_1(x) \quad (\text{C.17f})$$

$$\int j_l^2(x) x^2 dx = \frac{1}{2} x^3 [j_l^2(x) - j_{l-1}(x) j_{l+1}(x)], \quad l > 0. \quad (\text{C.17g})$$

The last three formulae are equally valid with the  $j$ 's replaced by the corresponding  $n$ 's.

Let us also quote a few definite integrals [4] involving the functions  $j_l$  and which are often used in scattering theory calculations, namely

$$\int_0^\infty e^{-ax} j_l(bx) x^{\mu-1} dx = \frac{\sqrt{\pi} b^l \Gamma(\mu+1)}{2^{l+1} a^{\mu+1} \Gamma(l+\frac{1}{2})} \times {}_2F_1\left(\frac{\mu+l}{2}, \frac{\mu+l+1}{2}; l+\frac{1}{2}; -\frac{b^2}{a^2}\right) \quad (\text{C.18a})$$

$$(\text{Re}(a+ib) > 0, \text{Re}(a-ib) > 0, \text{Re}(\mu+l) > 0), \quad (\text{C.18a})$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} j_l(bx) x^{l+1} dx = \frac{(2b)^l \Gamma(l+1)}{(a^2 + b^2)^{l+1}} \quad (\text{Re } a > |\text{Im } b|), \quad (\text{C.18b})$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} j_l(bx) x^{l+2} dx = \frac{2a (2b)^l \Gamma(l+2)}{(a^2 + b^2)^{l+2}} \quad (\text{Re } a > |\text{Im } b|). \quad (\text{C.18c})$$

Similar integrals involving higher powers of  $x$  may be obtained by differentiating with respect to the quantity  $a$ .

Finally, we note that

$$\int_0^\infty j_l(kr) j_l(k'r) r^2 dr = \frac{\pi}{2k^2} \delta(k-k'). \quad (\text{C.19})$$

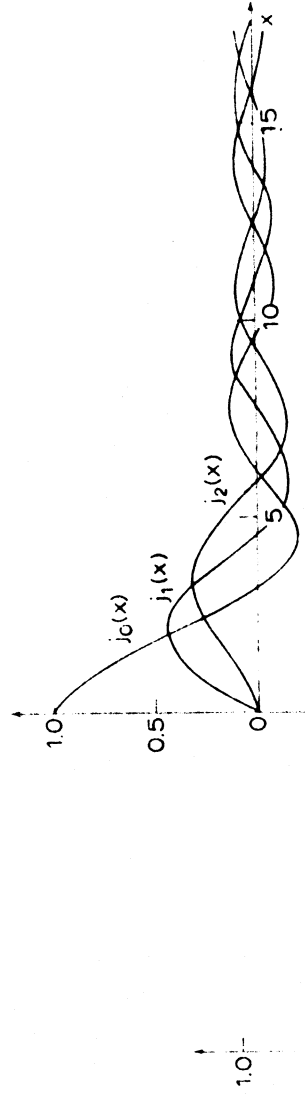


Fig. C.1. The first three spherical Bessel functions

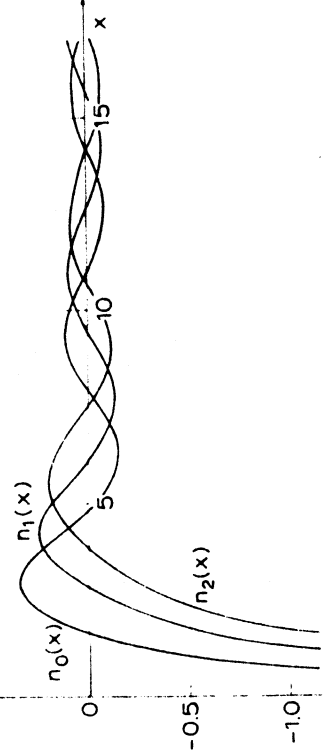


Fig. C.2. The first three spherical Neumann functions.